倉庫容量が期間毎に異なることができる場合のカーンの倉庫問題について

01504364　近畿大学・商経学部　林　芳男　HAYASHI Yoshio

（本文）カーンの倉庫問題とは Cahn [3] が 1948 年にアメリカ数学会報で発表した問題で「価格と費用が期間毎に変わっていく製品を考える。容量が一定の倉庫で初期在庫量が与えられているときのその製品の各期間毎の最適な購入(又は生産)、貯蔵、そして販売数量を決定せよ」という問題である。Charnes and Cooper [4,5] が 1955 年に LP に定式化し双対問題に書き直して解いたのに対し、少し遅れて Bellman [1] が [4] を参照しながら DP でアプローチした。林（1997）は二つの方法を融合した正しい最適解の構成法を示した。ここでは Charnes and Cooper [4,5]の中で簡単に解けると指摘のあった表題の問題について論ずる。その問題は

目的関数：（全体の利益の最大化） $\sum_{j=1}^{n}(p_j y_j - c_j x_j)$ ⟶ 最大化

制約条件：購入制約：第 i 期末の手持在庫量は倉庫の容量 B_i を越えてはいけない

$$A+\sum_{j=1}^{i}(x_j-y_j)\leq B_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1}$$

販売制約：第 i 期の販売量は第（i－1）期末に使える量を越えてはいけない

$$y_i \leq A+\sum_{j=1}^{i-1}(x_j-y_j) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\ (\text{空な和は}0\text{とする}) \tag{2}$$

第 i 期の販売量は第 i 期の容量 B_i を越えてはいけない

$$y_i \leq B_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3}$$

非負性条件：そしてどの期の購買、販売量もその取る値は非負

$$x_i,\ y_i \geq 0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

である。各期の倉庫容量 B_i が一定ではなく問題で与えられた正の定数であること、制約式(3)が加わった点が新しい。ここに、A は初期の在庫量である。この問題の第 k 期から終りの第 n 期までの第 k 期の初期在庫量が A であるときの最適な目的関数の値を $f_{k,n}(A)$ で表す。その問題の双対問題は(3)に係わる双対変数を w_i、(1)、(2)に係わるものを Charnes and Cooper [4,5] と同様に t_i, u_i で表すと次のようになる。

$(D2)_k$

目的関数： $\sum_{j=k}^{n}(B_j-A)t_j+AU_k+\sum_{j=k}^{n}B_j w_j$ ⟶ 最小化

制約条件： $T_j-U_{j+1}\geq -c_j\ (j=k,\ k+1,\ \cdots,\ n\ ;\ \text{但し、}U_{n+1}=0)$,

$-T_j+U_j+w_j\geq p_j\ (j=k,\ k+1,\ \cdots,\ n)$,

$T_j\geq T_{j+1}\ (j=k,\ k+1,\ \cdots,\ n\ ;\ \text{但し、}T_{n+1}=0)$,

$U_j\geq U_{j+1}\ (j=k,k+1,\cdots,n),\ w_j\geq 0\ (j=k,k+1,\cdots,n)$,

となる。但し、$t_j=T_j-T_{j+1}$, $u_j=U_j-U_{j+1}$ である。この双対問題の最適解は元の問題の双対問題ほどには容易に求めることはできない。というのはどれかの j で $B_j-A<0$ となる場合があるからである。

主問題への DP によるアプローチ：最適性原理により $k<n$ のとき

$$f_{k,n}(A)=\underset{x_k,y_k}{\mathrm{Max}}\{p_k y_k-c_k x_k+f_{k+1,n}(A+x_k-y_k):A+x_k-y_k\leq B_k,\ y_k\leq \mathrm{Min}\{A,\ B_k\},\ x_k\geq 0,\ y_k\geq 0\}$$

となる。目的関数、制約領域が線形であることを考慮に入れれば $0\leq A\leq B_k$ であればその制約領域の端点 (x_k, y_k) は $(0,\ 0)$, $(0,\ A)$, $(B_k-A,\ 0)$, (B_k, A) だけであるから

$$f_{k,n}(A)=\mathrm{Max}\{f_{k+1,n}(A),\ p_k A+f_{k+1,n}(0),\ p_k A-c_k B_k+f_{k+1,n}(B_k),\ -c_k(B_k-A)+f_{k+1,n}(B_k)\}$$

となる。$A>2B_k$ ならば問題 $f_{k,n}(A)$ は非実行可能となる。$B_k \leqq A < 2B_k$ であるとすると制約領域の端点 (x_k, y_k) は $(0, A-B_k)$, $(0, B_k)$, $(2B_k-A, B_k)$ の三点であるから

$$f_{k,n}(A) = \mathrm{Max}\{p_k(A-B_k)+f_{k+1,n}(B_k), p_kB_k+f_{k+1,n}(A-B_k), p_kB_k-c_k(2B_k-A)+f_{k+1,n}(B_k)\}$$

となる。$A=2B_k$ のとき制約領域は唯一の点 $(0, B_k)$ から成り立っているので

$$f_{k,n}(2B_k) = p_kB_k+f_{k+1,n}(B_k)$$

となる。値関数は $f_{k,n}(\cdot)$ は決まった区間で区分的に線形な連続関数であるから $f_{n,n}(\cdot)$ から出発してこれらの公式を利用して決定することは可能である。

双対問題からのアプローチ：与えられたT_{k+1}, U_{k+1}に対する第k期だけの(双対)変数が係わる問題

$$(\mathrm{D2})'_k \left|\begin{array}{ll} \text{目的関数：} & (B_k-A)t_k+Au_k+B_kw_k \longrightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件：} & t_k \geqq U_{k+1}-T_{k+1}-c_k, \\ & -t_k+u_k+w_k \geqq T_{k+1}-U_{k+1}+p_k, \\ & w_k \geqq 0,\ t_k \geqq 0,\ u_k \geqq 0 \end{array}\right.$$

の最適な目的関数の値を $g_k(A \mid T_{k+1}, U_{k+1})$ で表す。この問題は

$0 \leqq A \leqq B_k$ のとき　$T_k = \mathrm{Max}\{U_{k+1}-c_k, T_{k+1}\}$

$U_k = \mathrm{Max}\{T_k+p_k, U_{k+1}\}$

$w_k = 0$

$B_k < A \leqq 2B_k$ のとき $T_k = \mathrm{Max}\{U_{k+1}-c_k, T_{k+1}, U_{k+1}+p_k\}$

$u_k=0$，つまり、$U_k=U_{k+1}$,

$w_k=T_k-U_{k+1}+p_k$

とおいて解ける。$A>2B_k$ のときは$-\infty$に発散する。主問題との関係は、双対問題 $(\mathrm{D2})_k$ が有界で T_{k+1}, U_{k+1} が最適に与えられたものならば問題 $g_k(A \mid T_{k+1}, U_{k+1})$ は第k期の最適な値を与える、というものである。そのとき第k期の購入、販売変数の最適な値をそれぞれ$x_k^{(A)}, y_k^{(A)}$とおけば

$$f_{k,n}(A) = g_k(A \mid T_{k+1}, U_{k+1})+f_{k+1,n}(A+x_k^{(A)}-y_k^{(A)})$$

となる。さらに、非負の初期在庫量Aに対する問題 $f_{k,n}(A)$ が実行可能であるための必要十分条件は $A \leqq \mathrm{Min}\{2B_j\ (j=k, k+1, \cdots, n)\}$ であることが分かる。そのとき問題 $f_{k,n}(A)$ は有界な最適解を持つ。また、主変数と双対変数と相補性条件を入れた関係式から、主問題の最適解から最適な双対解を決定することとその逆も示すことができ、そういったことから効率的な解法を示すことができる。

[1] Bellman, R.,"On the Theory of Dynamic Programming — A Warehousing Problem", Management Science 2, 272-275 (1956)

[3] Cahn, A.S.,"The Warehouse Problem", Bull. Math. Soc., Vol. 54 (1948), p.1073.

[4] Charnes, A., and Cooper, W.W.,"Generalizations of the Warehousing Model", O.N.R. Research Memorandum, No.34, 1955, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Institute of Technology.

[5] Charnes, A., and Cooper, W.W.,"Generalizations of the Warehousing Model", Operational Research Quarterly 6, No.4, December, 1955, pp.131-172