1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

有限計画期間における機会年齢取替え費用について

佐藤毅 † (01207285), 尾崎俊治 † (01002265)
† 広島大学工学部第二類（電気系）

1. はじめに

従来, 信頼性分野における修理・取替えを考慮した多くの予防保全問題では, 保全活動はいつでも可能である仮定の下にモデル化および解析が行われ, 様々な保全方策が立てられてきた. それら保全活動がユニット使用期間外に実施される場合や, 使用中断による影響を無視できるものであればそれら保全方策の現場への応用が可能であると考えられる.

しかし, いかなる状況下においても予防保全活動が優先されることはユニットの使用を阻害するとともに関連ユニットへ影響を与えかねない. 例えば, 発電設備やネットワーク・サーバーなどに代表される連続稼動が要求されるシステムやユニットがその典型であり, 予防保全最優先の仮定はしばしば現場の状況を反映していない仮定となり, 現場への応用が事実上不可能となる場合がある. この状況に対応するため, 従来の代表的な予防取替え問題に対し, 予防保全活動が行える機会を考慮した機会取替え問題 [1],[2] が考察されている.

保全活動の評価基準として, 保全活動に必要な単位時間あたりの期待費用を採用し, それを最小化する方策が数多く提案 [3] されている. ほとんどの保全モデルでは, ユニットの使用対象期間を無限とする無限計画期間を評価規範として用いていることは注目すべきである. しかし, 無限計画期間の採用は時として不適切 [4] な場合があり, 計画期間を有限化 [5] する必要がある.

本稿では, 取替え問題において最も基本的な年齢取替え問題に機会取替えを適用した機会年齢取替え (Opportunity-Based Age Replacement) 問題に対し, 有限計画期間を対象とする有限計画期間における機会年齢取替え問題についての考察を行う基礎段階として, その期待費用の近似を行なう.

有限計画期間のモデル式として,Christer の提案式

$$C(t) = \left(\begin{array}{c} \text{無限計画期間における} \\ \text{単位時間あたりの期待費用} \end{array} \right) t + \zeta \tag{1}$$

を用いる.

2. 再生報酬過程

ユニットの導入からから交換までを 1 サイクルと規定し, i サイクルの長さを確率変数 Z_i で表す. このとき, 確率変数列 $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ は同一かつ独立な確率分布関数 $P_r\{Z_n \le t\} = V(t), (i.i.d.)$ に従うと仮定し, その平均と分散を $E[Z_n] = \mu < \infty$, $Var[Z_n] = \sigma^2 < \infty$ とする.

n 番目のサイクル中に発生する費用を表す確率変数を Y_n とする. このとき, Y_n は Z_n に依存しているが, その確率変数列の組 (Y_n, Z_n) は独立であると考えられる. このとき, 確率変数組列 (Y_n, Z_n) は再生報酬過程 [6] を形成する.

ユニットが新規に導入され, t 時間後までに使われた累積費用 $Y(t)$ は

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \tag{2}$$

として表現する. ここで, $N(t)$ は時刻 t までの再生回数を表している. さらに, $H(t)$ を X_n のための再生関数として定義する. つまり, $H(t) = E[N(t)]$ である.

以上の準備のもと, ユニット導入後, t 時間経過後の期待費用 $C(t)$ $(= E[Y(t)])$ は,

$$C(t) = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)+1} Y_i \right] - E_t[Y_{N(t)+1}] \tag{3}$$

で表され, Wald's の関係を適用することにより,

$$C(t) = [H(t)+1]E[Y_n] - E_t[Y_{N(t)+1}] \tag{4}$$

と書きかえられる. ここで, $E[\cdot] \neq E_t[\cdot]$, であることを注記しておく.

また, $H(t)$ は [5],[7] から

$$H(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{(\sigma^2 - \mu^2)}{2\mu^2} + o(1) \tag{5}$$

として書き表せる.

(4), (5) 式から, 十分大きな t に対して

$$C(t) = \frac{E[Y_n]}{\mu} t + \frac{(\sigma^2 + \mu^2)}{2\mu^2} E[Y_n] - E_t[Y_{N(t)+1}] \tag{6}$$

が得られる.

上式右辺第 1 項の $E[Y_n]/\mu$, $(= E[Y_n]/E[Z_n])$ は, 無限計画期間問題における単位時間あたりの期待費用であることに注目し,

$$\xi = \frac{E[Y_n]}{E[Z_n]} \tag{7}$$

とおく. また, 第 2 項, 第 3 項をまとめて

$$\zeta = \lim_{t \to \infty} \left\{ \frac{(\sigma^2 + \mu^2)}{2\mu^2} E[Y_n] - E_t[Y_{N(t)+1}] \right\} \tag{8}$$

とすることにより, 有限計画期間における近似式は

$$C(t) = \xi t + \zeta \tag{9}$$

として求めることができる.

3. 機会年齢取替えへの応用

前節で求めた期待費用 $C(t)$ に対し, 次のように機会年齢取替えモデルを導入する. ユニットの予防取替えは, ユニット投入時から T 時間以後始めて発生するユニットの寿命と全く独立な機会 (Opportunity) 発生時においてのみ実施することが可能である. 一方, 予防取替え以前に故障が発生した場合, ユニットは機会の発生を待たずに即座に事後取替えが行われ, 予防および事後取替えにおいて同一規格のユニットと交換されるものとする. ここで, 機会の発生は定常ポアソン過程に従うものと仮定する. つまり, $i-1$ 回目から i 回目の機会発生間の時間間隔長は指数型確率変数 W_i $(=W)$ に従うと考えられる.

i サイクル期間中のユニット故障時間を表す確率変数, および確率分布関数を X_i, $P_r\{X_i \leq t\} = F(t)$, $(i.i.d)$ とすることにより, 上述の機会年齢取替え問題におけるユニットの再生分布関数 $V(x)$ は,

$$V(x) = \begin{cases} F(x), & x < T+W \\ 1. & x \geq T+W \end{cases} \tag{10}$$

ここで,

$$E[Z_n] = \mu = \int_0^\infty \int_0^{T+y} [1-F(x)]dxdQ(y), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} Var[Z_n] &= \sigma^2 \\ &= 2\int_0^\infty \int_0^{T+y} x[1-F(x)]dxdQ(y) - \mu^2 \end{aligned} \tag{12}$$

で表され, $P_r\{W_i \leq x\} = Q(x)$ としている. 同様に,

$$E[Y_n] = c_p + (c_f - c_p)\int_0^\infty F(T+y)dQ(y) \tag{13}$$

であり, c_f, c_p はそれぞれ事後取替え費用, 予防取替え費用を表している. 無論, $(c_f > c_p)$ を仮定する.

最後に, 最後の区間における期待費用 $E_t[Y_{N(t)+1}]$ を求める. 期待費用は

$$E_t[Y_{N(t)+1}] = c_p + (c_f - c_p)P_r\{Z_{N(t)+1} \leq T+W\} \tag{14}$$

で与えられ,

$$P_r\{Z_{N(t)+1} \leq T+W\} = \int_0^\infty \int_{t-(T+y)}^{t} [F(T+y) - F(t-u)]dH(u)dQ(y) \tag{15}$$

として求められる.

先に求めた,(5),(11),(12) 式を用いて, 上式は

$$E[Y_{N(t)+1}] = \frac{\mu - \int_0^\infty (T+y)[1-F(T+y)]dQ(y)}{\mu} \tag{16}$$

として書き直すことができる.

以上の結果から, (8) 式の ζ は次のように求めることができる.

$$\zeta = -\left\{\frac{[2\mu\int_0^\infty (T+y)dQ(y) - \mu^2 - \sigma^2]E[Y_n]}{2\mu^2} - \frac{c_f\int_0^\infty (T+y-\mu)dQ(y)}{\mu}\right\}. \tag{17}$$

以上より, 有限計画期間における機会年齢取替えモデルの近似期待費用は (7) 式, (17) 式を用いることにより, (9) 式で表すことができる.

5. まとめと今後の課題

本稿では, 年齢取替え問題において予防保全活動が実施できる機会を考慮した機会年齢取替え問題に対し, 有限計画期間を導入した有限計画期間における機会年齢取替え費用の近似について考察を行なった. 製品の仕様としての寿命が短命であり, しかも保全活動がユーザー側の要求時にすぐさま対応できないような場合に, 本稿で提案したモデルは従来の保全モデルと比較し有効となるであろう.

今後, この近似期待費用を最小化する取替え方策についての解析, および数値的な方策解を求める必要がある.

また, 有限計画期間の導入に対し, Christer の近似式を用い期待費用の導出を試みたが, 彼の近似に対して新たな近似の方法もいくつか提案されており, それらの近似に対する本モデルの応用や, 年齢取替え以外の保全モデルへの応用なども今後の課題として取り上げる予定である.

参考文献

[1] Dekker, R., and Dijkstra, M. C., "Opportunity-Based Age Replacement: Exponentially Distributed Times Between Opportunities," Naval Research Logistics, **39**, (1992), 175-190.

[2] Dekker, R., and Smeitink, E., "Opportunity-Based Block Replacement," European Journal of Operational Research., **53**, (1991), 46-63.

[3] Dekker, R., "Applications of Maintenance Optimization Models: A Review and Analysis," Reliability Engineering and System Safety, **51**, (1996), 229-240.

[4] 土肥正, 海生直人, 尾崎俊治, "代替的評価規範の下でのフロッピーディスクに対する最適 1/N バックアップ方策," 電子情報通信学会技術研究報告, **98**, (1998), 7-12.

[5] Christer, A. H., "Refined Asymptotic Costs for Renewal Reward Processes," Journal of the Operational Research Society, **29**, (1978), 577-583.

[6] Ross, S. M., Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, San Francisco, 1970.

[7] Cox, D. R., Renewal Theory, Methuen, London, 1970.