1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

エントロピーと安全監視システム

名古屋工業大学　*鈴木 達也　SUZUKI Tatsuya
01006143　名古屋工業大学　大鋳 史男　OHI Fumio

1. 序.

監視対象システムの状態に応じて信号を出力する安全監視システムの最適構成を考える．本稿では，安全監視システムの監視対象システムに関する条件付きエントロピーを最適基準とした時の最適な監視システムの構造について調べる．

安全監視システムの最適構成については，センサー及び監視システムの状態空間を多状態にしたもの，異種のセンサーを組み合わせたもの等さまざまな議論がすでにあるが [2][3][4][5]，これらは監視対象システムの状態に対して誤った信号を出力した時の期待損失コストを判定基準とし，コスト関数はシステムの構成に依存しないとされている．これに対して，本稿では監視システムの出力が監視対象システムの状態をどれぐらい忠実に反映したものであるかに注目し，監視システムのもつ曖昧さを監視対象システムに関する条件付きエントロピーを用いて定式化し，その条件付きエントロピーを最小にするような監視システムの構造を求める．本稿で用いる条件付きエントロピーの基準は，コスト関数がシステムの構成に依存したものの一つになっている．条件付きエントロピーの基準は，監視システムの状態反映度を意味し，自然な形でコスト関数をシステムの構成に依存させたものになっている．

2. 監視システム.

定義 2.1

n 個のセンサーから構成される監視システムとは，次の条件を満たす組 $(\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i, S, \varphi)$ である．

(1)　$S, \Omega_i (i=1,2,...,n)$ は，それぞれ 2 つの要素 0, 1 からなる全順序集合であり，$0<1$ とする．

(2)　$\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i$ は，$\Omega_i (i=1,2,...,n)$ の直積順序集合である．$\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i$ の要素 $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n), \mathbf{y}=(y_1,...,y_n)$ に対して $\mathbf{x}\le\mathbf{y}$ は，$x_i \le y_i (i=1,2,...,n)$ を意味する．

(3)　φ は，$\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i$ から S への単調増加な全射である．つまり $\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i$ の要素 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ に対して $\mathbf{x}\le\mathbf{y}$ ならば $\varphi(\mathbf{x})\le\varphi(\mathbf{y})$ である．

Ω_i は，センサー i の状態空間であり，監視対象システムの状態に応じて センサー i が出力する信号の集合を意味する．関数 φ は，n 個のセンサーの出力をまとめて 1 つの信号にする働きをする．φ は，構造関数と呼ばれる．以降では監視システムを監視システム φ，システム φ などと呼ぶことがある．

システム $(\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i, S, \varphi)$ に対して

$$A_k(\varphi) = \sharp\{\mathbf{x}\in\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i \mid \varphi(\mathbf{x})=1, \sharp C_1(\mathbf{x})=k\}$$

とする．ここで $\sharp$ は，集合の濃度を表し、$C_1(\mathbf{x}) = \{i|x_i=1\}$ である。システム $(\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i, S, \varphi)$ は，次の条件を満たすとき $j-out-of-n$ システムと呼ばれる．

$$A_k(\varphi) = \begin{cases} \binom{n}{k}, & k\ge j \\ 0, & k<j. \end{cases}$$

$1-out-of-n$ システムは並列システム，$n-out-of-n$ システムは直列システム呼ばれる．$j-out-of-n$ システム を $\varphi_{j,n}$ と書く．

システム $(\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i, S, \varphi)$ に対して次のように定義されるφ_D を φ の双対システムと呼ぶ．

$$\forall\mathbf{x}\in\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i, \quad \varphi_D(\mathbf{x}) = 1-\varphi(\mathbf{1}-\mathbf{x})$$

ここで，$\mathbf{1}=(1,...,1)$，$\mathbf{1}-\mathbf{x}=(1-x_1,...,1-x_n)$ である．また，以降では $\mathbf{0}=(0,...,0)$ の記号を用いる．

$j-out-of-n$ システムの双対システムは，$n-j+1-out-of-n$ システムである．

P が $\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i$ 上の確率測度である時，構造関数 φ を用いて，S 上の確率測度 $\varphi\circ P$ が決まる．

$$\varphi\circ P(\{i\}) = P(\varphi^{-1}\{i\}), \quad i\in S.$$

$\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i$ 及び S 上の $\sigma-$集合体としては，それぞれの巾集合を考える．この $\varphi\circ P$ は，監視システムの確率的な特性を表す．

$$E_\varphi(P) = \sum_{i=0}^{1} -P(\varphi^{-1}\{i\}) log P(\varphi^{-1}\{i\})$$

を，システム φ のエントロピーと呼ぶ [1]．n 個のセンサーの確率的特性が P である時，監視システム φ がどのような信号を出力するかの曖昧さを表す．

$\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i$ 上の確率測度 P, R が次の条件を満たす時互いに双対であるという．

$$\forall\mathbf{x}\in\Pi_{i=1}^{n}\Omega_i, \quad P(\{\mathbf{x}\}) = R(\{\mathbf{1}-\mathbf{x}\})$$

P と双対な確率測度は一意に決まるので，それを P_D と書く．

3. エントロピーを判定基準とした監視システムの最適構成. Eを監視対象システムの状態空間とし，$(E,\mathcal{E},\pi)$ を確率空間とする．本節では集合 E に対して条件を課さない．

監視システムは，$\Omega_i=\{0,1\}(i=1,...,n)$ を状態空間とする n 個のセンサーから構成されるとする．

$Q(\cdot,\cdot)$ を $(E,\mathcal{E},\pi)$ から $(\Pi_{i=1}^n\Omega_i,\otimes_{i=1}^n\mathcal{P}(\Omega_i))$ への推移確率とする．つまり，任意の $e\in E$ に対して $Q(e,\cdot)$ は，$(\Pi_{i=1}^n\Omega_i,\otimes_{i=1}^n\mathcal{P}(\Omega_i))$ 上の確率測度であり，任意の $A\in\otimes_{i=1}^n\mathcal{P}(\Omega_i)$ に対して，$Q(\cdot,A)$ は，$(E,\mathcal{E})$ から $([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]})$ への可測関数である．

監視システムとして $(\Pi_{i=1}^n\Omega_i,S,\varphi)$ を採用した時，その監視システムの曖昧さを表す監視対象システムに関する条件付きエントロピーは，次のように定義される [1].

$$H(\varphi|E) \;=\; \int_{e\in E} E_\varphi(Q(e,\cdot))\pi(de)$$

$\varphi\circ Q(e,\cdot)$ は，監視システムの状態が e の時の監視システム φ の確率的特性を表している．

$\Pi_{i=1}^n\Omega_i$ 上の確率測度 P が交換可能であるとは，任意の $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)\in\Pi_{i=1}^n\Omega_i$ と $(1,...,n)$ の任意の順列 $(i_1,...,i_n)$ に対して

$$P(\{(x_1,...,x_n)\})=P(\{(x_{i_1},...,x_{i_n})\})$$

が成立することである．

確率測度 P が交換可能であることは，センサーの確率的特性及びセンサー間の確率的依存関係が同質であることを意味する．

定理 3.1. 各 $e\in E$ に対して $Q(e,\cdot)$ は，交換可能であるとする．この時，高々 n 個のセンサーからなる監視システム φ に対して，

$$H(\varphi|E)\geq\min_{1\leq j\leq n}H(\varphi_{j,n}|E)$$

が成立する．つまり、交換可能である時、高々 n 個のセンサーからなる監視システム全体の中である $j-out-of-n$ システムが条件付きエントロピーを最小にするシステムの一つである．この定理は，センサーの確率的独立性に関係なく成立する．

4. 監視対象システムの状態空間が $E=\{0,1\}$ の場合. 本節では、監視対象システムの状態として異常と正常の 2 状態のみを考え、$E=\{0,1\}$ とする．この時、システム $(\Pi_{i=1}^n\Omega_i,S,\varphi)$ の条件付きエントロピー $H(\varphi|E)$ は、次のようになる.

$$H(\varphi|E) \;=\; \sum_{i,j=0}^{1}-Q(i,\varphi^{-1}\{j\})logQ(i,\varphi^{-1}\{j\})\,\pi(i).$$

定理 4.1. 監視対象システムの状態空間が $E=\{0,1\}$ で，推移確率 $Q(0,\cdot)$ と $Q(1,\cdot)$ とが互いに双対の関係にある時，任意の監視システム φ に対して，

$$H(\varphi|E)\geq\min\{H(\varphi_{1,n}|E),\ H(\varphi_{n,n}|E)\}$$

が成立する．

定理 4.1 の条件下で条件付きエントロピーを最小にする監視システムは，直列システムであるかまたは並列システムのいずれかである事が分かる．また，この定理は，センサーの確率的独立性，同質性に関係なく成立する．

5. 結論. 本稿では，監視対象システムに関する条件付きエントロピーを最小にする安全監視システムの最適構造について調べ，推移確率が交換可能である時，ある $k-out-of-n$ システムが，双対である時，直列システムまたは並列システムが最適であることを示した．

従来の最適性の判定基準は、コスト関数であり監視システムの出力信号が持つ曖昧さに注目したものではない。監視システムの出力信号の信頼性が問われるのであれば，それ自体を判定基準にしなければならず，条件付きエントロピーはその一つの定式化としてある．

今後の問題としては，条件付きエントロピーを判定基準としながら状態空間を多状態とした時の最適な監視システムの構造がどのようになるか等が残されている．

参考文献. [1] 有本 卓, 確率・情報・エントロピー, 森北出版, 1994. [2] Hagihara,H., Ohi,F. and Nishida,T., An Optimal Structure of Safety Monitoring Systems, Math. Japonica, 31(1986), 389-397. [3] Hagihara,H., Sakurai,M., Ohi,F and Nishida,T., Application of Barlow-Wu Systems to Safety Monitoring Systems, Technology Reports of The Osaka University, 36(1986), 245-248. [4] Phillips,M.J., The Reliability of Two-terminal Parallel-Series Networks Subject Top Two Kinds of Failure, Microelectronics and Reliability, 15(1976), 535-549. [5] Phillips,M.J., k-out-of-n:G Systems Are Preferable, IEEE Transactions of Reliability, R-29(1980), 166-169.