1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

倒産確率を考慮した融資における貸出利率 －分割回収モデル－

01402793　名古屋銀行　システム部　*中村　正治　NAKAMURA　Syouji
01204194　流通科学大学情報学部　三道　弘明　SANDOH　Hiroaki
01400053　愛知工業大学工学部　中川　覃夫　NAKAGAWA　Toshio

1．はじめに

銀行においては，資金の調達の多くを預金によって行ない，その資金運用の多くを融資することによって，運用収益を得ている．近年の金融自由化の進展とともに，信用リスクの観点から，企業の倒産を考慮したリスク管理が特に必要となってきている．市場原理より，ハイリスク・ハイリターンの考え方から，リスクの高い先への融資には，高い利率を適用し，リスクに見合った収益を考えるべきである．融資の形態は多様であるが，ここでは，融資対象企業の倒産確率を考慮した場合の，貸出金を分割回収する場合の適切な貸出利率を解析的に導出する．

2．連続複利

時刻 0 における元金の現価をP_0とする．この元金の時刻 t における価値は，瞬間利率 α の複利で時刻 t まで利息が増加すると考え，その元利合計を$P(t)$と書く．このとき，時刻$t+\Delta t$における元利合計は

$$P(t+\Delta t)=P(t)(1+\alpha\Delta t)+o(\Delta t) \quad (1)$$

となる．よって

$$\frac{dP(t)}{dt}=\alpha P(t) \quad (2)$$

であるから，この微分方程式を解くことによって，初期条件$P(0)=P_0$のもとで，

$$P(t)=P_0 e^{\alpha} \quad (3)$$

を得る．

一方，単位時間当たりの瞬間元利金 μ が一定で，t時間続く場合の時刻 0 における現価P_0は

$$P_0=\int_0^t \mu e^{-\alpha\tau}d\tau=\mu\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \quad (4)$$

である．よって現価P_0に等価な瞬間元利金 μ は次式で与えられる．

$$\mu=P_0\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha t}} \quad (5)$$

3．期待収益

融資先から貸出金を分割回収する場合，瞬間利率α_1，融資期間をTとすると，貸出額Mに対する単位時間当たりの元利金の回収額は，(5)式より，

$$\mu=M\frac{\alpha_1}{1-e^{-\alpha_1 T}} \quad (6)$$

融資した企業が時刻 t で倒産した場合，時刻 t までに回収した元利金合計の現価$Q_1(t)$は，

$$Q_1(t)=\int_0^t \mu e^{-\alpha_1\tau}d\tau \quad (7)$$

である．融資期間がTであるとき，時刻 t までに回収した元利金の終価は，$Q_1(t)e^{\alpha_1 T}$で与えられる．貸出額Mが，瞬間利率α_2の複利で融資開始時点に調達できるとすると，このような融資を行った場合の収益を時刻 T の価値で表した$R_1(t)$は，

$$\begin{aligned}R_1(t)&=Q_1(t)e^{\alpha_1 T}-Me^{\alpha_2 T}\\&=Me^{\alpha_1 T}\frac{1-e^{-\alpha_1 t}}{1-e^{-\alpha_1 T}}-Me^{\alpha_2 T}\\&\qquad (0\le t\le T)\end{aligned} \quad (8)$$

となる．

融資期間 T 中に融資対象企業が倒産しない場合，貸出額Mに対する収益の時刻Tでの価値

$R_2(T)$ は,

$$\begin{aligned} R_2(T) &= Q_1(T)e^{\alpha_1 T} - Me^{\alpha_2 T} \\ &= M(e^{\alpha_1 T} - e^{\alpha_2 T}) \end{aligned} \tag{9}$$

である.

融資先の倒産確率分布が $F(t)$ で与えられる場合, 融資期間 T で貸出額 M に対する期待収益を時刻 T での価値で表現した時刻0における期待収益 $R_0(T)$ は,

$$\begin{aligned} R_0(T) &= \int_0^T R_1(t)dF(t) + R_2(T)\overline{F}(T) \\ &= M\left[\frac{e^{\alpha_1 T}}{1-e^{-\alpha_1 T}}\int_0^T \overline{F}(t)\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}dt - e^{\alpha_2 T}\right] \end{aligned} \tag{10}$$

となる. 但し, $\overline{F}(t) \equiv 1 - F(t)$ である.

4. 貸出利率

$$\lim_{\alpha_1 \to \alpha_2} R_0(T) = \frac{-Me^{\alpha_2 T}}{1-e^{-\alpha_2 T}}\int_0^T F(t)\alpha_2 e^{-\alpha_2 t}dt < 0$$

$$\lim_{\alpha_1 \to \infty} R_0(T) = \infty$$

が成立することから $R_0(T) \geq 0$ すなわち,

$$\frac{e^{\alpha_1 T}}{1-e^{-\alpha_1 T}}\int_0^T \overline{F}(T)\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}dt \geq e^{\alpha_2 T} \tag{11}$$

となる $\alpha_1\ (\alpha_2 < \alpha_1 < \infty)$ が存在する. (11)式を書き直すと, 次式を得る.

$$\overline{F}(T) + \int_0^T \frac{1-e^{-\alpha_1 t}}{1-e^{-\alpha_1 T}}dF(t) \geq e^{-(\alpha_1 - \alpha_2)T} \tag{12}$$

(12)式において, 左辺は α_1 に関して定数 c $(0 < c < 1)$ の単調増加関数, 右辺は α_1 に関して1から0への単調減少関数. よって, (11)式を満たす最小の α_1^* が唯一存在する.

5. 近似計算

(11)式において,

$$\frac{1}{1-e^{-\alpha_1 T}}\int_0^T \overline{F}(t)d(1-e^{-\alpha_1 t}) \geq e^{-(\alpha_1 - \alpha_2)T} \tag{13}$$

と書き直す. 近似式として, a が小のとき,

$$e^{-at} \approx 1 - at \tag{14}$$

とおくと, (14)式は

$$\frac{\int_0^T \overline{F}(t)\alpha_1 dt}{\alpha_1 T} \geq 1 - (\alpha_1 - \alpha_2)T \tag{15}$$

よって,

$$\alpha_1 - \alpha_2 \geq \frac{1}{T^2}\int_0^T F(t)dt \tag{16}$$

であり, α_1 の近似値が容易に求まる. さらに, $F(t)$ が小さいので, 積分を $F(T)$ とおくと,

$$\alpha_1 - \alpha_2 \geq \frac{1}{T}F(T) \tag{17}$$

または, 積分において, $t = \frac{T}{2}$ とおくと,

$$\alpha_1 - \alpha_2 \geq \frac{1}{T}F(T/2) \tag{18}$$

となり, さらに簡単な近似式を得る.

(16)式, (17)式, (18)式の右辺が T の増加関数ならば, 融資期間を長くすれば, 貸出利率と預金利率の差を大きくしなければならない. すなわち, 預金利率を固定すれば, 貸出利率は融資期間が長くなれば高くしなければならない. このことは, 実務上知られている事実と一致する.

また, (17)式または(18)式は, 倒産確率を考慮した場合の, 融資期間, 預金利率, 貸出利率の関係を示した簡単な近似式として有効であると思われる.

数値計算は当日発表する.

参考文献

[1]大久保 豊 編：”アーニングアット・リスク”, 金融財政事情研究会, 1997

[2]西田 真二：”ＡＬＭ手法の新展開”, 日本経済新聞社, 1995