1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

準モンテカルロ法によるモーゲージ担保証券の価格付け
およびその誤差評価

申請中 東京大学 小林 啓 KOBAYASHI Kei
01604870 東京大学 諸星 穂積 MOROHOSI Hozumi
01501020 東京大学 伏見 正則 FUSHIMI Masanori

1 はじめに

s 次元の単位立方体 $I^s = [0,1]^s$ 上で定義された関数 $f(\boldsymbol{x})$ の積分値

$$I = \int_{[0,1]^s} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \qquad (1)$$

を数値的に求めること，およびその計算値にどの程度の誤差が含まれるかを評価することは，実用上重要な問題である．

準モンテカルロ法は多次元数値積分の手法の中で，ある程度高次元まで利用でき，かつ収束が速いという特徴をもっており，(1) の積分を Low Discrepancy Sequence(LDS) $\{\boldsymbol{x}_i\} \in I^s$ による均等重みの平均

$$I_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\boldsymbol{x}_i) \qquad (2)$$

で近似する方法である．

応用例として,I^s 区間における高次元積分に書き直せる経路依存型デリバティブの価格評価が注目されている.当然解析解を求めることが困難な場合にこの手法は意味があるわけで,推定値と共に誤差を把握しておく必要がある．

準モンテカルロ法については，理論的な誤差の上界の評価式が存在するだけで，実用的に利用できるような誤差評価法がいまだ存在しない．近年，モンテカルロ法を参考にした確率的誤差評価法が提案されている．ここでは，これらの手法を，ヨーロピアン・コールオプションやモーゲージの価格づけに適用した数値実験の結果を述べる．

2 統計的な評価

点列 $\{\boldsymbol{z}_i\}$ として以下に定義する (t,m,s)-net[1] を加工したものを用いる．

定義 1 整数 $b \geq 2$ が与えられたとき，I^s 中の区間で，

$$E = \prod_{j=1}^{s}\left[\frac{a_j}{b^{d_j}}, \frac{a_j+1}{b^{d_j}}\right)$$

と表現できるものを 基数 b の基本区間という．ここで，d_j, a_j は非負整数で，$a_j < b^{d_j}$ を満たすものとする．m, t を非負整数とし，$t \leq m$ とする．I^s 内の点列が，任意の体積 b^{t-m} の基本区間にちょうど b^t 個含まれるとき，基数 b の (t,m,s)-net であるという．

(t,m,s)-net $\{\boldsymbol{x}_i\}$ から，確率的に独立になるように変動させた点列 $\{\boldsymbol{z}_i\}$ を r 組生成して，$S_N^{(1)},\ldots,S_N^{(r)}$ を計算し，推定値

$$\hat{\theta}_f = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} S_N^{(i)}$$

とその分散

$$\hat{\sigma}_f^2 = \frac{1}{r(r-1)}\sum_{i=1}^{r}(S_N^{(i)} - \hat{\theta}_f)^2$$

を求め，$\hat{\sigma}_f$ で誤差を見積もる．

確率的な変動を与える方法としては，次の 2 種類を考える．

1. Scramble. [3] で提案された方法である．$\boldsymbol{x}_i = (x_i^1,\ldots,x_i^s)$ と座標成分で表示したとき，各成分を $x_i^j = \sum_{k=1}^{\infty} x_{ijk}b^{-k}$ と b 進展開する．$\{\boldsymbol{z}_i\}, \boldsymbol{z}_i = (z_i^1,\ldots,z_i^s), z_i^j = \sum_{k=1}^{\infty} z_{ijk}b^{-k}$ を次のように決める．

$$\begin{aligned} z_{ij1} &= \pi_j(x_{ij1}), \\ z_{ij2} &= \pi_{jx_{ij1}}(x_{ij2}), \\ &\vdots \\ z_{ijk} &= \pi_{jx_{ij1}x_{ij2}\ldots x_{ij,k-1}}(x_{ijk}). \end{aligned}$$

各 π は $0,1,\ldots,b-1$ の置換で，全置換 $b!$ 個の上で一様に分布しているとする．π_j

は全ての i について各 x_i^j の第 1 桁を置換する. $\pi_{ja_{ij_1}}$ は同様に第 2 桁を置換するが, 第 1 桁の値に依存して決まる. 以下同様に, 第 k 桁の置換は, $k-1$ 桁までの値に依存して決まる.

2. Random shift. [1] $\boldsymbol{u}_i$ を I^s 上一様分布する互いに独立なベクトルとする. $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{u}$ (mod 1) とする.

3 数値実験

(t,m,s)-net として Faure 列,Sobol 列を用い、それぞれ対して Scramble, および Shift の手法を適用した.

3.1 European Call Option

ここでは解析解がわかっているものに対しての収束状態, および誤差評価が出来ているかを確認する. あとでモーゲージ担保証券を評価することを踏まえて, 敢えて 360 次元の積分として評価する.

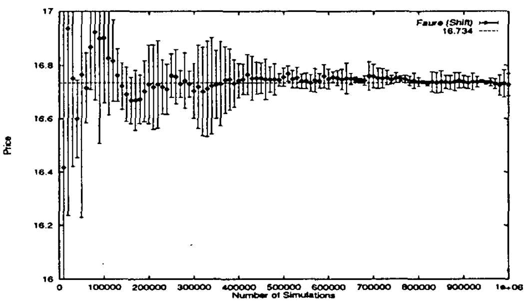

図 1: Faure 列を Shift することによる European Call Option の価格評価. (推定値 $\pm\, 3\hat{\sigma}_f$)

3.2 MBS

ここでは問題設定を文献 [2] を参考にして, MBS(モーゲージ担保証券) の価格付けのシミュレーションをする. この問題においては, 各月の利子率に応じてプリペイメント率が決まり, それによって投資残高が変化するため経路依存型のデリバティブであるため, 高次元の積分となる. この時, 解析解を求めることは不可能で, それゆえ LDS を用いた準モンテカルロ法でも誤差評価が出来るという点に意味がある. (疑似) 乱数を用いたモンテカルロ法では, 中心極限定理に基づいて誤差評価ができるが収束速度が極めて遅く, また, 今までの LDS を用いた準モンテカルロ法では, 誤差の上界の評価式が存在するだけで解析解が求められるものにしか誤差評価ができなかったことを改めて述べておく.

ほとんどの固定利付きモーゲージは, 当初の満期が 30 年に設定されている. キャッシュフローは毎月あるので,360 次元の積分の問題となる. 問題設定は [2] と全く同様にして行なった.

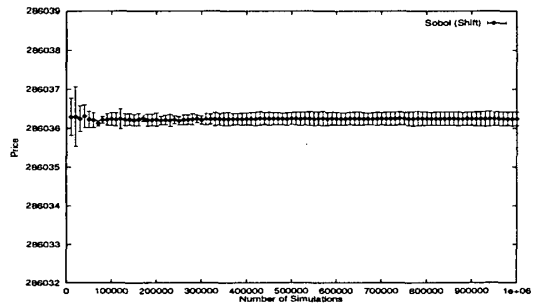

図 2: Sobol 列を Shift することによる MBS の価格評価. (推定値 $\pm\, 3\hat{\sigma}_f$)

4 結語

解析解を求めるのが困難な高次積分に対して, 準モンテカルロ法を用いることによっても誤差評価することが出来るということを示した。応用例として European Call Option および MBS の価格評価の数値実験を行なった。

数値実験からは, 推定値の精度で 2 つの方法に有意な差は見られなかった. 一方計算の速度の点からは, 方法 2 が方法 1 よりも圧倒的に速い. 今回の実験結果をみる限り, 単純な random shift のほうが誤差見積もりの手段としては有効であると思われる.

参考文献

[1] Morohosi, M. and Fushimi, M.: A Practical Approach to the Error Estimation of Quasi-Monte Carlo Integrations, *Technical Report* METR 98-10, Department of Mathematical Engineering and Information Physics, School of Engineering, University of Tokyo, October 1998.

[2] Ninomiya, S. and Tezuka, S.: Toward Real-Time Pricing of Complex Financial Derivatives, *Applied Mathematical Finance* **3**, 1-20, 1996.

[3] Owen, A. B.: Ramdomly Permuted (t,m,s)-Nets and (t,s)-Sequences, *Technical Report* No. 464, Department of Statistics, Stanford University, September 1994.