1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

一般境界ノックアウトオプションの近似価格評価

02502201　北海道大学　*花田 邦生　HANADA Kunio
01105381　北海道大学　木村 俊一　KIMURA Toshikazu

1　はじめに

ノックアウトオプションとは，原資産価格があらかじめ定められた境界を越えた場合に権利が消滅するタイプのオプションである．原資産の価格過程$\{S(t); t \geq 0\}$が幾何ブラウン運動にしたがうと仮定すると，満期T，権利行使価格Kの通常のヨーロピアン・コールオプションの価格$C(S(t),t)$が，次の偏微分方程式の解として与えられることはよく知られている[1,4].

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC+\frac{\partial C}{\partial t}=0,\\&C(S(T),T)=\max\left(S(T)-K,0\right).\end{aligned} \tag{1}$$

ただし，rは利子率，σは過程$S(t)$のボラティリティを表す．Merton [4] は (1) に対して境界条件

$$C(B(t),t)=0 \tag{2}$$

を付することにより，下側に消滅境界があるヨーロピアンタイプのノックアウトオプションの価格評価を行っている．ここで$B(\cdot)$は消滅境界で，時間に依存する関数である．しかし，実際には$B(\cdot)$が指数関数の場合以外は閉じた解は求めることができない．

また，Kunitomo and Ikeda [3] は，消滅境界が上側と下側の両方にある場合のノックアウトオプションの価格評価を行っているが，やはり，指数境界に限定されている．

本稿では，単一の消滅境界を有するヨーロピアンタイプのノックアウトオプションに対し，境界形状を一般化した場合の近似価格評価を行う．なお，紙面の都合上，下側に消滅境界をもつコールオプション (down-and-out call option) のみを紹介するが，上側に消滅境界をもつプットオプション (up-and-out put option) についても同様の結果を得ている [2].

2　近似評価式の導出

時刻tにおける下側消滅境界を$B_\ell(t)$ $(0 < B_\ell(t) \leq K, 0 \leq t \leq T)$で表す．この境界をもつノックアウト(コール)オプションの価格$C_\ell(S(t),t)$は (1), (2) の解として与えられる ($C(S(t),t) = C_\ell(S(t),t)$, $B(t) = B_\ell(t)$とする)．(1), (2) に対して変数変換

$$\begin{aligned}&x \stackrel{\text{def}}{=} \log\frac{S(t)}{B_\ell(t)},\\&y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{2}(T-t),\\&u(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K}e^{-\alpha x-\beta y}C_\ell(S(t),t)\end{aligned} \tag{1}$$

を行う．ここでα, βは任意の定数とする．このとき，$u(x,y)$ $(x \geq 0, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T)$は次の偏微分方程式を満たすことがわかる．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\{2\alpha+k_2(t)\}\frac{\partial u}{\partial x}\\&\qquad+\left\{\alpha^2+k_2(t)\alpha-k_1-\beta\right\}u-\frac{\partial u}{\partial y}=0,\\&u(x,0)=\psi(x)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{e^{-\alpha x}}{K}\max\left(B_\ell(T)e^x-K,0\right),\\&u(0,y)=0\end{aligned} \tag{2}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}&k_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2r}{\sigma^2},\\&k_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\{r-\theta_\ell(t)\}}{\sigma^2}-1,\\&\theta_\ell(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{B_\ell(t)}\frac{dB_\ell(t)}{dt}\end{aligned}$$

とする．変数変換 (1) においては，定数α, βは自由に決めることができるので，仮にα, βを

$$\begin{aligned}&2\alpha+k_2(t)=0,\\&\alpha^2+k_2(t)\alpha-k_1-\beta=0\end{aligned} \tag{3}$$

を満たすようにとることができれば，(2) は単純な熱伝導方程式になり，容易に解を求めることがで

きる．しかし，(3) を解くと

$$\alpha = -\frac{k_2(t)}{2},$$
$$\beta = -\frac{k_2^2(t)}{4} - k_1 \quad (4)$$

となることから，一般にはα, βは時間$t \in [0, T]$の関数となる．変数変換 (1) を用いて (2) を導出する過程においてはα, βが定数であることを用いているため，(3) が成立するとすると (2) の導出過程そのものが意味をなさないことになってしまう．この問題を回避するため，変数変換 (1) を用いて (2) を導出する過程においてのみ，$\theta_\ell(t)$ を定数とみなす近似，i.e.,

$$\theta_\ell(t) \approx \theta_\ell \quad (5)$$

を導入する．なお，$\theta_\ell(t)$ の定義より明らかなように $B_\ell(t)$ が指数関数のときは (5) は厳密に成立する．ここで，$k_2(t) \approx k_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2(r-\theta_\ell)}{\sigma^2}$ なので，α, βは定数となり，(2) の導出過程に関する問題は解決する．(5) が成立し，定数α, βに対し，(3) が成立するならば，(2) は

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0,$$
$$u(x,0) = \psi(x),$$
$$u(0,y) = 0 \quad (6)$$

となる．(6) を解くと

$$u(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_0^\infty \psi(z) \left\{ e^{-\frac{(z-x)^2}{4y}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4y}} \right\} dz \quad (7)$$

を得る．変換前の変数に戻すと，一般境界をもつノックアウト(コール)オプションの近似価格評価式

$$C_\ell(S(t),t) = \frac{B_\ell(T)e^{-\theta_\ell(t)\tau}}{B_\ell(t)} S(t)\Phi(d_{c1})$$
$$-Ke^{-r\tau}\Phi(d_{c2}) - \left(\frac{S(t)}{B_\ell(t)}\right)^{-\frac{2}{\sigma^2}\{r-\theta_\ell(t)\}+1}$$
$$\times \left\{ \frac{B_\ell(t)B_\ell(T)e^{-\theta_\ell(t)\tau}}{S(t)} \Phi(d_{c3}) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_{c4}) \right\} \quad (8)$$

を得る．ただし，$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数，

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} T - t$$
$$d_{c1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \left\{ \log \frac{S(t)B_\ell(T)}{KB_\ell(t)} + \left(r - \theta_\ell(t) + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right\}$$
$$d_{c2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \left\{ \log \frac{S(t)B_\ell(T)}{KB_\ell(t)} + \left(r - \theta_\ell(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right\}$$
$$d_{c3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \left\{ \log \frac{B_\ell(T)B_\ell(t)}{KS(t)} + \left(r - \theta_\ell(t) + \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right\}$$
$$d_{c4} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\tau}} \left\{ \log \frac{B_\ell(T)B_\ell(t)}{KS(t)} + \left(r - \theta_\ell(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right) \tau \right\}$$

である．なお，(8) は通常のヨーロピアンコールオプションの評価式$C(\cdot, \cdot)$ を用いて

$$C_\ell(S(t),t) = C\left(\frac{B_\ell(T)e^{-\theta_\ell(t)\tau}}{B_\ell(t)} S(t),\ t \right)$$
$$- \left(\frac{S(t)}{B_\ell(t)}\right)^{-\frac{2}{\sigma^2}\{r-\theta_\ell(t)\}+1}$$
$$\times C\left(\frac{B_\ell(t)B_\ell(T)e^{-\theta_\ell(t)\tau}}{S(t)},\ t \right) \quad (9)$$

と表現できる．

3 数値的検証

価格評価式の近似精度に関する数値実験の結果を発表当日に報告する．

参考文献

[1] Black, F. and Scholes, M., "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, **81** (1973) 637–654.

[2] 花田邦生, "一般境界ノックアウトオプションの近似価格評価," 北海道大学大学院経済学研究科修士論文 (1999).

[3] Kunitomo, N. and Ikeda, M., "Pricing options with curved boundaries," *Mathematical Finance*, **2** (1992) 257–297.

[4] Merton, R., "The theory of rational option pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4** (1973) 141–183.