1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

CAPMを用いたファジィポートフォリオ問題

入会予定　大阪大学　*細江 和佳子　HOSOE Wakako
01005194　大阪大学　石井　博昭　ISHII Hiroaki
02102914　大阪大学　片桐　英樹　KATAGIRI Hideki

1　はじめに

各証券の期待収益率を決める理論モデルの一つとして、資本資産評価モデル（CAPM）がある。各証券の期待収益率を「確率変数」で表し、総収益率が目標以上になる確率最大化モデルについては、H.Moritaによって既に研究されている [1]。しかし、現実的には各証券の「市場ポートフォリオ超過収益率に対する感応度」が曖昧な為、期待収益率を確率のみで表すことが不適切な場合もある。本研究では、各証券の期待収益率を「確率」と「ファジィ」の両性質を持つファジィランダム変数で表し、投資の意思決定問題の解法の１つを提案する。

2　CAPM

2.1　モデルにおける仮定

本研究では以下のことを仮定する。

1. （１期間モデル）
すべての投資家は時点０において時点１の証券の期待収益率に基づいて投資の意思決定を行う。
2. （予想の同質性）
情報はすべての投資家に平等与えられることを前提とし、すべての投資家は証券の時点１の収益率について同一の確率分布を予想する。個別証券の期待収益率、リスクは既知である。
3. （リスク回避的投資家）
すべての投資家はリスク回避的である。すなわち、１%のリスク増加を受け入れるには、１%より大きい期待収益率の増加を必要とする。
4. （摩擦のない証券市場）
証券の売買には手数料がかからず、投資家は自由に空売り・空買いができる。
5. （完全競争市場）
市場には多くの投資家が参加しており、個々の投資家は市場価格を左右するほどの影響力を持っていない。
6. （無リスク証券の存在）
市場には無リスク証券が存在していて、投資家は利子率 r_f で無制限に貸借ができる。

2.2　関係式

Sharpeらによって導入されたCAPMによれば、市場で需要が均衡する状態において各証券の期待収益率は市場ポートフォリオ超過収益率に比例する為、以下のような関係が得られる [2]。

$$c_i = \alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

c_i：証券 i の収益率
α_i：証券 i の α 値
（市場の変化に独立な証券 i の収益率）
β_i：証券 i の β 値
（証券 i の市場ポートフォリオ超過収益率に対する感応度）
r_m：市場ポートフォリオ超過収益率
ε_i：市場ポートフォリオ超過収益率と独立な誤差項

3　定式化

本研究では証券 i の β 値を次のような L 型のメンバーシップ関数に制限されるファジィ変数 B_i とする。

$$\mu_{B_i}(b_i) = L\left((b_i - \beta_i))/\delta_i\right)$$

ここで、L は、$[0, +\infty) \to [0,1]$, $L(0) = 1, L(l) = 0$ を満たす単調減少な上半連続関数である。便宜上 B_i を $B_i = (\beta_i, \delta_i)_L$ と表記する。

$y = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ を表すファジィランダム変数 $\tilde{Y}(\omega)$ は拡張原理より

$$\tilde{Y}(\omega) = \left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i) x_i, \sum_{i=1}^n \delta_i r_m x_i\right)_L$$

で表すことができる。ここで、総収益率のファジィ目標として「だいたい d_o 以上」を設定し、そのメンバーシップ関数を $\mu_G(y)$ で表す。さらに、この可能性測度を次のように定義する。

$$\Pi_{Y(\omega)}(G) = \sup_y \min\left(\mu_{Y(\omega)}(y), \mu_G(y)\right)$$

a_i を証券 i の価格、$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を配分ベクトル、b を総資産とすると、問題は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} P: \quad & \mathit{maximize} \quad h \\ & \mathit{subject\ to} \quad \sum_{i=1}^n a_i x_i = b \\ & \qquad 0 \le x_i \le \gamma_i \\ & \qquad Pr\left(\Pi_{Y(\omega)}(G) \ge h\right) \ge t \end{aligned}$$

$\Pi_{Y(\omega)}(G) \geq h$ を変形すると、

$$\begin{aligned}
&\sup_y \min\left(\mu_{Y(\omega)}(y), \mu_G(y)\right) \geq h \\
\leftrightarrow\quad &\exists y : \text{"}\mu_{Y(\omega)}(y) \geq h, \mu_G(y) \geq h\text{"} \\
\leftrightarrow\quad &\exists y : \text{"}L\left(\frac{y - \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i}\right) \geq h, \\
&y \geq \mu_G^*(h)\text{"} \\
\leftrightarrow\quad &\exists y : \text{"}y \leq \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i)x_i \\
&\qquad + L^*(h) r_m \sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i, \\
&y \geq \mu_G^*(h)\text{"} \\
\leftrightarrow\quad &\mu_G^*(h) \leq \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i)x_i \\
&\qquad + L^*(h) r_m \sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i
\end{aligned}$$

但し$\mu_G^*(h)$, $L^*(h)$ をそれぞれ次のように定義する。

$$L^*(h) = \begin{cases} \sup\{r | L(r) > h, r \geq 0\} & (0 < h \leq 1) \\ \infty & (h = 0) \end{cases}$$

$$\mu_G^*(h) = \begin{cases} \inf\{r | \ \mu(r) \geq h\} & (0 < h \leq 1) \\ \inf\{r | \ \mu(r) > h\} & (h = 0) \end{cases}$$

問題 Pを次のように書きかえることが出来る。

$$\begin{aligned}
P_1: \quad & maximize \quad h \\
& subject\ to \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \\
& \qquad\qquad\quad 0 \leq x_i \leq \gamma_i
\end{aligned}$$

$$Pr\left(\mu_G^*(h) \leq \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i r_m + \varepsilon_i)x_i + L^*(h) r_m \sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\right) \geq t$$

r_m , ε_iをそれぞれ $N(\overline{r_m}, \sigma_m^2)$, $N(0, \sigma_{ei}^2)$ で表される確率変数とすると、正規分布の性質より

$$\frac{(r_m - \overline{r_m})\left\{\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i + L^*(h)\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\right\} + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i}{\sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i + L^*(h)\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i\right\}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので問題 P_1の制約式を次のように等価確定条件に書き換えることができる。

$$\begin{aligned}
P_2: \quad & maximize \quad h \\
& subject\ to \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \\
& \qquad\qquad\quad 0 \leq x_i \leq \gamma_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_G^*(h) - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i - \overline{r_m} w \\
&\qquad \leq K_{1-t}\sqrt{w^2\sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n}\sigma_{ei}^2} \\
&w = \sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i + L^*(h)\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i
\end{aligned}$$

但し、多変量正規分布の t 分位点を K_tとする。P_2は [3] の方法を応用して効率よく解くことができる。

4 終わりに

問題を効率よく解くアルゴリズムなどの詳細については当日の発表で述べる予定である。なお、この研究は文部省科学研究費基盤研究 (c)(2)10680428 によるものであることを付記しておく。

参考文献

[1] H. MORITA, "STUDIES ON STATISTICAL APPROACHES IN STOCHASTIC PROGRAMMING", University of Kyoto at Japan . Doctor Thesis (1992) .

[2] W. F.Sharpe,"Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk,", *J. of Finance* **19** (1964) 425-442.

[3] H.Ishii , S.Shiode and T.Nishida, "AN ALGORITHM FOR A PARTIALLY CHANCE-CONSTRAINED E-MODEL", *Journal of the Operations Research Society of Japan* **22** (1979) 233-155.

[4] W . DINKELBACH, "ON NONLINEAR FRACTIONAL PROGRAMMING,", *Management Science* **13** (1967) 492-498.

[5] G. P.Szegö,"PORTFOLIO THEORY WITH APPLICATION TO BANK ASSET MANAGEMENT", *Academic Press*(1980)