1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ファジィパラメータを含む2レベル0-1計画問題に対する遺伝的アルゴリズムを用いたStackelberg解の計算方法

広島大学 ＊丹羽 啓一 NIWA Keiichi
01403974 広島大学 西﨑 一郎 NISHIZAKI Ichiro
01202665 広島大学 坂和 正敏 SAKAWA Masatoshi

1. はじめに

現実の意思決定状況においては，階層的な構造をもつ組織において複数の意思決定者 (DM) が存在するような意思決定問題が定式化されることが少なくない．そのような問題の例として 2 レベル計画問題が挙げられる．

2 レベル計画問題は上位レベルと下位レベルのそれぞれに DM が存在し，各 DM が互いに独立した決定変数をもち，各々の目的関数を最適にするような問題である．本研究においては，上位レベルの DM と下位レベルの DM の間に協力する関係が存在しないような 2 レベル計画問題を考察する．

2 レベル 0-1 計画問題に含まれるパラメータの設定に対して，問題の定式化を行う専門家の判断のあいまいさを考慮すると，従来より行われてきている経験的，主観的な方法でパラメータをある値に設定するよりは，むしろファジィ数を用いて「だいたい m ぐらいの数」として表した方が，より現実的な定式化を行えると考えられる．

本論文においては，上位レベルの DM と下位レベルの DM の間に協力する動機が存在しないようなファジィパラメータを含む 2 レベル 0-1 計画問題に焦点をあて，Stackelberg 解 [1] を求めるために坂和ら [2] によって提案された 2 重構造文字列を用いた GA を適用した解法の提案を行う．

2. ファジィパラメータを含む 2 レベル 0-1 計画問題

ファジィパラメータを含む 2 レベル 0-1 計画問題は次のように定式化される．

$$\left.\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \ & z_1 = \tilde{\boldsymbol{c}}_1 \boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{d}}_1 \boldsymbol{y} \\ \text{s. t.} \ \min_{\boldsymbol{y}} \ & z_2 = \tilde{\boldsymbol{c}}_2 \boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{d}}_2 \boldsymbol{y} \\ & \text{s. t.} \ \tilde{A}\boldsymbol{x} + \tilde{B}\boldsymbol{y} \le \tilde{\boldsymbol{b}} \\ & \qquad \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{n_1},\ \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n_2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ここで，$\tilde{\boldsymbol{c}}_1, \tilde{\boldsymbol{c}}_2$ は各要素がファジィ数である n_1, n_2 次元の費用係数行ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は上位レベルの n_1 次元列 0-1 決定変数ベクトル，$\boldsymbol{y}$ は，下位レベルの n_2 次元列 0-1 決定変数ベクトル，$\tilde{A}, \tilde{B}$ は各要素がファジィ数で表される $m \times n_1$，$m \times n_2$ 係数行列，$\tilde{\boldsymbol{b}}$ は各要素がファジィ数で表される m 次元列右辺定数ベクトルを表す．

上位レベルの DM が問題 (1) の Stackelberg 解を計算するとき，すべてのファジィ数を規定するメンバシップ関数の帰属度が，すべてある値 α 以上であれば良いと判断したと考えると，パラメータ $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_2, A, B, \boldsymbol{b})$ は α-レベル集合 $(\tilde{\boldsymbol{c}}_1, \tilde{\boldsymbol{d}}_1, \tilde{\boldsymbol{c}}_2, \tilde{\boldsymbol{d}}_2, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}})_\alpha$ に属する任意の値をとりうる．そこで，上位レベルの DM が下位レベルの DM の最適反応を考える上で，下位レベルの DM が自己の目的関数を最小にするようにパラメータ $(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_2, A, B, \boldsymbol{b}) \in (\tilde{\boldsymbol{c}}_2, \tilde{\boldsymbol{d}}_2, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}})_\alpha$ を決定すると仮定する．すなわち，上位レベルの DM は下位レベルの DM がパラメータ $(\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_2, A, B, \boldsymbol{b}) \in (\tilde{\boldsymbol{c}}_2, \tilde{\boldsymbol{d}}_2, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}})_\alpha$ を下位レベルの DM にとって最も望ましいように決定すると考えたときの最適反応を与える問題は，$\hat{\boldsymbol{x}}$ を上位レベルの DM の決定とすると，次のように表現できる．

$$\left.\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_2, A, B, \boldsymbol{b}} \ & \boldsymbol{c}_2 \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{y} \\ \text{s. t.} \ & A\hat{\boldsymbol{x}} + B\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n_2} \\ & (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_2, A, B, \boldsymbol{b}) \in (\tilde{\boldsymbol{c}}_2, \tilde{\boldsymbol{d}}_2, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}})_\alpha \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ファジィ数に対する α-レベル集合の性質より，各パラメータの α-レベル集合はそれぞれ閉区間 $[\boldsymbol{c}^L_{2\alpha}, \boldsymbol{c}^R_{2\alpha}]$, $[\boldsymbol{d}^L_{2\alpha}, \boldsymbol{d}^R_{2\alpha}]$, $[A^L_\alpha, A^R_\alpha]$, $[B^L_\alpha, B^R_\alpha]$, $[\boldsymbol{b}^L_\alpha, \boldsymbol{b}^R_\alpha]$ で表されるので，問題 (2) は任意の $\hat{\boldsymbol{x}}$ に対して，次の等価な問題として表現できる．

$$\left.\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{y}} \ & \boldsymbol{c}^L_{2\alpha} \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}^L_{2\alpha} \boldsymbol{y} \\ \text{s. t.} \ & A^L_\alpha \hat{\boldsymbol{x}} + B^L_\alpha \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{b}^R_\alpha \\ & \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n_2} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

このような下位レベルの DM の最適反応のもとで，問

題 (1) は次のように書き換えることができる．

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{\boldsymbol{x}} \ \tilde{\boldsymbol{c}}_1 \boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{d}}_1 \boldsymbol{y} \\ \text{s. t.} \ \min\limits_{\boldsymbol{y}} \ \boldsymbol{c}^L_{2\alpha} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^L_{2\alpha} \boldsymbol{y} \\ \qquad \text{s. t.} \ A^L_{\alpha} \boldsymbol{x} + B^L_{\alpha} \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{b}^R_{\alpha} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{n_1}, \ \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n_2} \end{array}\right\} \quad (4)$$

ここで，上位レベルの DM も自己の目的関数を最小化する上で，パラメータ $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{d}_1) \in (\tilde{\boldsymbol{c}}_1, \tilde{\boldsymbol{d}}_1)_\alpha$ を彼にとって最も望ましいように決定すると考えると，問題 (4) は

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{d}_1} \ \boldsymbol{c}_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{y} \\ \quad \text{s. t.} \ (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{d}_1) \in (\tilde{\boldsymbol{c}}_1, \tilde{\boldsymbol{d}}_1)_\alpha \\ \qquad \min\limits_{\boldsymbol{y}} \ \boldsymbol{c}^L_{2\alpha} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^L_{2\alpha} \boldsymbol{y} \\ \qquad \text{s. t.} \ A^L_{\alpha} \boldsymbol{x} + B^L_{\alpha} \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{b}^R_{\alpha} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{n_1}, \ \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n_2} \end{array}\right\} \quad (5)$$

となる．さらに，ファジィ数に対する α-レベル集合の性質より，問題 (5) は

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{\boldsymbol{x}} \ \boldsymbol{c}^L_{1\alpha} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^L_{1\alpha} \boldsymbol{y} \\ \text{s. t.} \ \min\limits_{\boldsymbol{y}} \ \boldsymbol{c}^L_{2\alpha} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^L_{2\alpha} \boldsymbol{y} \\ \qquad \text{s. t.} \ A^L_{\alpha} \boldsymbol{x} + B^L_{\alpha} \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{b}^R_{\alpha} \\ \qquad\qquad \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^{n_1}, \ \boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{n_2} \end{array}\right\} \quad (6)$$

となり，通常の 2 レベル 0-1 計画問題に帰着される．

3. GA の適用

本論文においては，ファジィパラメータを含む 2 レベル 0-1 計画問題を扱うことから，上位レベルの DM の決定変数 $\boldsymbol{x}$ を対象とした GA (上位レベル GA) と下位レベルの DM の決定変数 $\boldsymbol{y}$ を対象とした GA (下位レベル GA) を組合わせたアルゴリズムを提案する．それぞれの GA に対して坂和らによって提案された 2 重構造文字列を用いた GA [2] を適用し，Stackelberg 解を導出する．適用する GA において，2 重構造文字列の特徴を活かした実行可能解のみを生成するデコーディングアルゴリズムの設計を行うために，問題に含まれる制約式の係数はすべて正の数とする．また，2 重構造文字列に促した遺伝的オペレータとして，再生には，各レベルの GA の個体ごとに計算した関数評価値を用いてランキング選択を行い，エリート保存戦略も併用する．交叉には，2 重構造文字列用に改訂された PMX [2] を用い，突然変異には，上段の添字列に対しては逆位を，下段の 0-1 文字列に対してはビット反転を適用する．次に，本論文において提案した解法のアルゴリズムを示す．

問題 (6) の Stackelberg 解を導出するアルゴリズム

手順 1 上位レベルの個体 $\boldsymbol{x}$ を N_1 個発生させ，上位レベルの初期個体群とする．

手順 2 各個体 $\boldsymbol{x}$ に対して，以下の手順を繰り返す．

手順 2-1 下位レベルの決定変数 $\boldsymbol{y}$ に対応する個体をランダムに N_2 個発生させ，初期個体群とする．

手順 2-2 与えられた $\boldsymbol{x}$ と生成された $\boldsymbol{y}$ に対してデコーディングアルゴリズムを適用し，各個体の評価を行う．

手順 2-3 下位レベル GA の打ち切り世代数をみたしていれば手順 3 に進む．

手順 2-4 下位レベル GA の個体に対して遺伝的オペレータを適用する．

手順 3 上位レベルの各個体 $\boldsymbol{x}$ に対して，手順 2-1 から手順 2-4 を経ることで得られた最良解を $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ とする．その解を用いて上位レベルの各個体の評価を行う．

手順 4 上位レベル GA の打ち切り世代数を満たしていれば手順 6 へ進む．

手順 5 上位レベル GA の個体 $\boldsymbol{x}$ に対して遺伝的オペレータを適用し，手順 2 に戻る．

手順 6 最も良い評価値をもつ個体を最適な個体 $(\boldsymbol{x}^*_\alpha, \boldsymbol{y}^*_\alpha)$ とみなし，アルゴリズムを終了する．

4. おわりに

本論文においては，ファジィパラメータを含む 2 レベル 0-1 計画問題に対して，2 重構造文字列を用いた GA を導入し，Stackelberg 解を求めるための解法の提案を行った．数値実験において提案手法の有効性を検証した．

参考文献

[1] K. Shimizu, Y. Ishizuka, J.F. Bard: Nondifferentiable and two-level mathematical programming, Kluwer Academic Publishers, Boston (1997).

[2] 坂和, 田中: 遺伝的アルゴリズム, 朝倉書店 (1995).

[3] D.E. Goldberg: Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning, Addison Wesley, Massachusetts (1989).