コンピューターネットワーク設計に対する確率計画法の応用

01205890 （財）電力中央研究所 椎名 孝之

1 背景と目的

既知の需要要求を満たすように、端末の集合を接続するコンピューターネットワークの設計を考える。この問題は、端末の集合がLANなどを通じて様々なタイプの集線器で集線されるものであり、集線装置配置問題 (Concentrator Location Problem, Ahuja[1], Bertsekas and Gallager [3]) と呼ばれる。

集線装置配置問題

- 集線装置を設置する候補地が与えられた上で、実際に設置する位置の決定
- 各端末と集線装置の接続関係を決定

本稿では、確率計画法(Prékopa [8], Birge and Louveaux [4])を応用したコンピューターネットワーク設計問題を取り扱う。償還請求を有する確率計画法(Stochastic Programming with Recourse) では、制約に確率変数が含まれるとき、制約が満たされない場合に罰金を与え、罰金に対する償還請求(recourse) を含む目的関数を最小化する。

償還請求を有する確率計画問題に対しては、Benders [2] の分解法を応用した L-Shaped 法(Van Slyke and Wets [9]) による解法が知られている。連続変数を持つ問題に対するL-Shaped 法に対して、整数制約などを持つ離散的な確率計画問題は、取り扱いが難しい。Louveaux and Peeters [7] では、双対下降法による近似解法が示された。厳密解法としては、Laporte and Louveaux [5] では分枝カット法の枠組にL-shaped 法を含めた解法が示され、Laporte, Louveaux and Van Hamme [6] では、施設配置問題への応用が示されている。本論文では、離散的な確率計画問題（償還請求を有する問題）に対し、L-Shaped 法と整数計画法を加えた解法の枠組を示す。

2 確率的集線装置配置問題の定式化

無向グラフ $G=(V,A)$ によって、コンピューターネットワークをモデル化した。点集合 V は、地理的な配置が分っている端末の集合 J、集線装置を設置する候補地の集合 I から構成される。辺集合 A は2点間の接続リンクを示す。各端末は何れかの集線装置に接続しなければならない。この時、集線装置の処理能力が、それに接続する各端末で発生する情報量の和を下回ってはいけない。ただし、その需要 $a_m(\tilde{\xi})$ は確率変数 $\tilde{\xi}$ に依存するものとする。$\tilde{\xi}$ は離散的な確率分布に従い、$\tilde{\xi}=\xi$ となる確率 $P(\tilde{\xi}=\xi)$ は与えられており、確率分布の台を $\Xi(P(\Xi)=1)$ とする。

そして、全ての端末を集線装置に接続し、集線装置の設置場所を選定して総設置費用最小のネットワークを設計する。以下のように記号を定義する。

表 1 記号の説明

変数	意味
x_{ij}	端末を候補地 i に存在する集線装置に接続するとき1、それ以外0
y_i	候補地 i に装置を設置するとき1、それ以外0
パラメータ	意味
c_{ij}	端末 j と候補地 i との接続費用
f_i	候補地 i で装置を設置した時の費用
$a_j(\tilde{\xi})$	端末 j における情報発生量 (確率変数 $\tilde{\xi}$ を含む)
b_i	候補地 i で設置した装置の処理能力

(確率的集線装置配置問題 プロトタイプ)

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}+\sum_{i\in I} f_i y_i \\
\text{subject to}\quad & \sum_{j\in J} a_j(\tilde{\xi})x_{ij} \le b_i y_i, \quad i\in I \\
& \sum_{i\in I} x_{ij}=1, \quad j\in J \\
& x_{ij}\le y_i, \quad i\in I, j\in J \\
& x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \quad i\in I, j\in J
\end{aligned}
$$

制約 $\sum_{j\in J} a_j(\tilde{\xi})x_{ij}\le b_i y_i, i\in I$ は確率変数 $\tilde{\xi}$ を含むため、等価な確定問題(deterministic equivalent) に定義し直す必要がある。x,y は確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値を観測する前に決定される変数であり、第1段階決定変数と呼ばれる。確率変数 $\tilde{\xi}$ の実現値 ξ が観測されたとき、制約$\sum_{j\in J} a_j(\xi)x_{ij}\le b_i y_i, i\in I$ は侵される可能性があるため、この右辺に第2段階決定変数の $w_i(\xi)$ を付加する。この変数は、超過需要に対して行う設備の増設を示す。このように新たに設備を増設することは、余分な費用増加をもたらす。装置 i における単位需要あたりの設備増加に対する費用を q_iとし、目的関数に設備増設

費用の（全ての確率変数の実現値に対する）平均を加える。すると問題は、新たな設備増設費用に対する償還請求を有する確率的整数計画問題として定義される。

(償還請求を有する確率的集線装置配置問題 SCLP)

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I} f_i y_i + Q(x,y) \\ \text{subject to} & \sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j\in J \\ & x_{ij} \le y_i, \quad i\in I, j\in J \\ & x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \quad i\in I, j\in J \\ \text{where} & Q(x,y) = E_{\tilde{\xi}}[Q(x,y,\tilde{\xi})] \end{array}$$

$$Q(x,y,\xi) = \min_w\{\sum_{i\in I} q_i w_i(\xi)|$$

$$\sum_{j\in J} a_j(\xi)x_{ij} \le b_i y_i + w_i(\xi), w_i(\xi)\ge 0, i\in I\}, \xi\in\Xi$$

(SCLP) は完全リコースを持つ。すなわち、第1段階決定変数x, yがどのような値をとろうと、第2段階決定変数wは実行可能解を持つ。

3 解法の枠組

本稿で示す解法では、直接 $Q(x,y,\xi)$ を 第1段階変数x,y の関数として捉える。L-Shaped 法は、$Q(x,y,\xi)$ のエピグラフを最適性カット (Optimality Cut) で与えられる有限個の閉半空間の共通部分として近似していく方法であるといえる。まず、$Q(x,y,\xi)$ に対する上界を示す変数θ_ξを導入した主問題を解く。

(確率的集線装置配置問題 主問題)

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in I} f_i y_i + \theta \\ \text{subject to} & \sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j\in J \\ & x_{ij} \le y_i, \quad i\in I, j\in J \\ & x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \quad i\in I, j\in J \\ & \theta \ge \sum_{\xi\in\Xi} P(\tilde{\xi}=\xi)\theta_\xi \end{array}$$

この主問題に対し、逐次$Q(x,y,\xi)$を近似する最適性カット (Optimality Cut) を加える。

定理 1 $(\hat{x},\hat{y})$を *(SCLP)*の実行可能解とする。また、$\hat{\pi}_i$は $max\{\sum_{i\in I}(\sum_{j\in J} a_j(\xi)\hat{x}_{ij} - b_i\hat{y}_i)\pi_i | 0\le\pi_i\le q_i, i\in I\}$ の最適解とする。θ_ξを$Q(x,y,\xi)$の上界とすると、$\theta_\xi \ge \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\hat{\pi}_i a_j(\xi)x_{ij} - \sum_{i\in I}\hat{\pi}_i b_i y_i$ は *(SCLP)*の妥当不等式になる。

主問題の得られた解$(\hat{x},\hat{y},\hat{\theta})$ より最適性カットを添加する。最適性カットは、主問題の最適解において、$Q(\hat{x},\hat{y})$ を近似するものである。

整数L-Shaped 法 (ε :許容誤差)

- ステップ **0.** 暫定目的関数値 $\bar{z}=\infty$、目的関数の下界値 $\underline{z}=0$ とする。
- ステップ **1.** 主問題の最適解 $(\hat{x},\hat{y},\hat{\theta})$ を求める。
- ステップ **2.** $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\hat{x}_{ij} + \sum_{i\in I} f_i\hat{y}_i + \hat{\theta} > \underline{z}$ ならば、$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\hat{x}_{ij} + \sum_{i\in I} f_i\hat{y}_i + \hat{\theta} = \underline{z}$、$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\hat{x}_{ij} + \sum_{i\in I} f_i\hat{y}_i + Q(\hat{x},\hat{y}) < \bar{z}$ ならば、$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\hat{x}_{ij} + \sum_{i\in I} f_i\hat{y}_i + Q(\hat{x},\hat{y}) = \bar{z}$ とする。
- ステップ **3.** $\bar{z}\le(1+\varepsilon)\underline{z}$ならば終了。
- ステップ **4.** $\xi\in\Xi$ に対して、$\hat{\theta}_\xi < Q(\hat{x},\hat{y},\xi)$ ならば、妥当不等式を追加してステップ1. へ。

参考文献

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti and J. B. Orlin, *Network Flows*, Prentice Hall, 1993.

[2] J. F. Benders, Partitioning procedures for solving mixed variables programming problems, *Numerische Mathematik*, 4, 238-252, 1962.

[3] D. Bertsekas and R. Gallager, *Data Networks*, Prentice Hall, 1987.

[4] J. R. Birge and F. Louveaux, *Introduction to stochastic programming*, Springer-Verlag, 1997.

[5] G. Laporte and F. V. Louveaux, The integer L-shaped method for stochastic integer programs with recourse, *Operations Research Letters*, 13, 133-142, 1993.

[6] G. Laporte, F. V. Louveaux and L. Van Hamme, Exact solution to a location problem with stochastic demands, *Transportation Science*, 28, 95-103, 1994.

[7] F. V. Louveaux and D. Peeters, A dual-based procedure for stochastic facility location, *Operations Research*, 40, 564-573, 1992.

[8] A. Prékopa, *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[9] R. Van Slyke and R. J.-B. Wets, L - shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic linear programs, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17, 638-663, 1969.