1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ネットワーク上の最適施設配置問題に対するアルゴリズム

02004620　慶應義塾大学　*梅澤 正史　UMEZAWA Masashi
01400760　慶應義塾大学　西野 寿一　NISHINO Hisakazu

1　はじめに

本研究では、ネットワーク上の最適施設配置問題を考える。この問題は、既存のネットワーク上に新たに設置する施設数 p が任意に与えられた時、サービス供給者が顧客から得る利得を最大にする配置場所を見つける問題である。従来、木構造のネットワークに関して、顧客の許容半径に特定の制約がある場合や、$p=1$ の場合などの特殊なケースに関して入力の２乗以下の計算量で解を求められるアルゴリズムが提案されてきている。

[3] は、木構造ネットワークにおける最適施設配置問題を扱っているが、サービス供給者が得る最大利得値が施設を置く個数 p に関して凹になる場合を考え、大域最適解が多項式時間で求められるアルゴリズムを与えている。しかし一般的にこの利得関数は凹にならないことが、簡単な例によって確かめられる。本研究では、この問題を利得関数に関してより一般化した (凹とは限らない) 問題の大域的最適解を求めるアルゴリズムを提案する。さらに顧客の需要をより現実的に考慮した場合へのアルゴリズムの適用を行う。サイクルを含む一般のネットワーク上におけるこのケースの問題は、NP 困難であることがわかっている。

2　モデル

サービス供給者からサービスを求める顧客は、ネットワークの各頂点上にのみ存在しているとする。各頂点には顧客の重みと許容半径が与えられ、任意の頂点間には距離が与えられているとする。また同じ頂点にいる顧客は皆同じ許容半径を持つとする。このネットワーク上に新しい施設がいくつか設けられた時、顧客は許容半径内で最も近い施設を利用する。その時顧客をカバーしたと言い、その顧客の重みを獲得する。この獲得利得が最大になるようにサービス供給者が p 個の新しい施設をネットワーク上のどこに建てるべきかを決めるのが、この施設配置問題の趣旨である。施設は、頂点だけでなく辺上の点にも置くことができるものとする。しかし、施設を置く実行可能地点としてかなり小さい部分集合 $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_m\}$ の中の点のみを考えれば良いことが、[3] によって証明されている。これによって問題は有限個の実行可能地点に関してはじめから考えれば良いことになる。

3　アルゴリズム

木構造ネットワーク上の問題に関して、アルゴリズムを提案する。アルゴリズムは基本的に次の３つのルーチンを再帰的に利用して進む。

- EXT(T,π,r)
- INT(T,π,r)
- ALLOC$(f_1,\cdots,f_k;\pi)$

EXT(T,π,r)

T を木とする。T のルートから距離 r の T 外の地点に１つの施設があるとした時、T 内に π 個の施設を置いた時にサービス供給者が顧客から得られる最大の利得を求めるルーチンである。

INT(T, π, r)

T のルートから距離 r 以内の T 内の地点に少なくとも１つの施設がある時、T 内にπ個の施設を置いた時にサービス供給者が顧客から得られる最大の利得を求めるルーチンである。

ALLOC$(f_1, \cdots, f_k; \pi)$

πを非負の整数として、以下のような資源配分を求めるルーチンである。

$$
\begin{aligned}
&Maximize \quad F(\pi) = \sum_{i=1}^{k} f_i(p_i) \\
&subject\ to \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = \pi \\
&\qquad\qquad\quad p_i : nonnegative\ integer.
\end{aligned}
$$

本研究では、各 $f_i(p_i)$ が p_iに関して単調非減少だが凹ではない場合に ALLOC を解く以下のアルゴリズムを提案する。

Step 0. $j \leftarrow 2, p \leftarrow 0, F(i) \leftarrow f_1(i), i = 1, \cdots, \pi$

Step 1. $F(p) \leftarrow \max_{0 \le t \le p}\{F(p-t) + f_j(t)\}$

Step 2. $p < \pi$ならば、$p \leftarrow p+1$ として、Step 1. へ。そうでなければ $p \leftarrow 0$ として Step 3. へ。

Step 3. $j < k$ ならば、$j \leftarrow j+1$ として、Step 1. へ。そうでなければ $F(\pi)$ を出力して終了する。

$f_i(p_i), i = 1, \cdots, k$ が p_iに関して凹である場合には、この問題はこれまでしばしば研究が行われており、比較的少ない計算量 $O(k \log p)$ 程度で求められることがわかっている。ところが、f_iが凹でない任意の関数の場合にこの問題を解くことはそれほど容易ではない。これまで ALLOC を解くアルゴリズムは、[1] によって提案されているが、それは $O(kp^2)$ の計算量を必要としている。一方、本研究のアルゴリズムは、計算量は [1] と同程度であるが、取り扱いがシンプルである上、幾何的直観によらないシステマティックなアルゴリズムであることを主張しておきたい。

4 需要の個人差を導入した問題

これまでの問題は同じ頂点にいる顧客は皆同じ許容半径を持つという仮定をしていたが、これはあまり現実的ではない。そこでこの仮定をより一般化し、顧客の需要に個人差があることを考慮したより現実的な問題を考える。ただし定式化の簡単のため、ここでは顧客のいる頂点から施設までの距離に比例して需要が減ると仮定した (下図参照)。

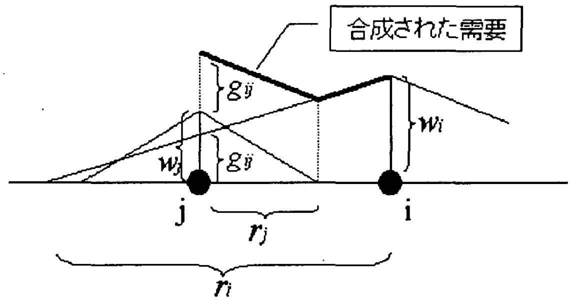

図 1: 辺上の利得関係

この問題に対する大域的最適解を求めるアルゴリズムは、前節で述べたアルゴリズムに多少の修正を加えることによって得られることを期待することができる。

参考文献

[1] W.Karush, "A general algorithm for the optimal distribution of effort", *Management Science*, 9 (1962) 50-72.

[2] T.U.Kim, T.J.Lowe, A.Tamir and J.E.Ward, "On the location of a tree-shaped facility", *Networks*, 28 (1996) 167-175.

[3] N.Megiddo, E.Zemel and S.L.Hakimi, "The maximum coverage location problem", *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, 4 (1983) 253-261.