1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

訪問頻度を考慮した施設群への距離の等高線
ー地域・地区計画のための基礎的提案ー

01107680　慶應義塾大学　栗田　治　KURITA Osamu

1. はじめに

"利用者から都市施設への距離" は要件であるが，地域・地区計画に適切に反映されているとは言い難い．例として近隣住区 [1] を考えよう．これは小学校区を単位として，通過交通を排除し適切な動線を確保するというアイデアに基づいており，現在でも住区計画の主たる技術的・思想的な裏付けとなっている [2]．大学における近隣住区論の講義や演習では，学生は具体的な図面や模型を見せられる．そこには小学校，ショッピング・センター，公園，住居といった構成物が描かれているが，それらの配置の便利さが明示的に語られることは少ない．そうしたサービスの本質に関わる情報を埋没させたままでは，同一地域を対象にした複数の地区計画の優劣を客観的に判断出来ない．

上述の現状認識に基づいて，複数の施設を平面上に配置したときの移動の効率を正しく認識するためのモデルを提案する．本モデルによって，過去の地区計画で "もやもや" したまま放置されてきた重要な部分をある程度は明示的に取り扱うことが出来る．

2. 定式化

地区内に配置すべき J 種の都市施設を直交座標で

$$\boldsymbol{x}_j = (x_j, y_j) \quad (j = 1, \cdots, J) \tag{1}$$

と与える．また

$$w_j = [\text{利用者が施設}j\text{を訪れる頻度}] (j = 1, \cdots, J) \tag{2}$$

とし，$w_1 + w_2 + \cdots + w_J = 1$ と規準化しておく．

頻度分布は利用者毎に異なってもよい．どの施設をどんな頻度で利用するかは，利用者の年齢・家族構成・職業といった特性に依存すべきものである．ある施設群の配置はある個人にとっては便利でも，同じ場所に住む別の個人にとっては不便かもしれない．この事実を明示的に取り扱うことも地区計画の要件である．

次に $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{x}$ の距離を記述する：

$$r(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{x}) = r(u, v; x, y). \tag{3}$$

訪問頻度で重み付けした距離 (平均距離) を s とすると

$$s(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_J) = \sum_{j=1}^{J} w_j r(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{x}_j) \tag{4}$$

と表現される．この重み付き距離 s の等高線によって，地区内のどの地点がどの程度便利であるかが視覚的に明らかになる．さらに等高線の計算に基づいて s の度数分布や密度函数を追求することもできる．

3. 距離の分類と記述の作法

前出の距離 r は連続平面上の距離 (直線距離，2乗距離，Recti-Linear 距離など) とネットワーク上の距離に大別される．連続平面上の距離に関しては解析学的な作法で重み付き距離 s の等高線を取り扱える．一方のネットワーク上の距離に関しては，グラフ理論の最短経路の木を構成する算法に基づいて，重み付き距離 s の値をネットワーク上に割り当てることが可能である．本稿では紙面の都合から，直線距離の場合と2乗距離の場合に焦点を当てて記述する．なお，r を所要時間や運賃と見做すことにも現実的な意味がある．

4. r が直線距離の場合の記述

2点間の距離を次式で与える：

$$r(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{x}) = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}. \tag{5}$$

このとき重み付き距離は次の通りに記述される：

$$s = \sum_{j=1}^{J} w_j \sqrt{(u-x_j)^2 + (v-y_j)^2}. \tag{6}$$

s の凸性を利用した方法 ([3,4] の改訂版) を提案する．まず $s(u, v)$ の最小化を実行し，その解を原点とする直交座標系で (u, v) と施設位置 $(x_j, y_j) (j = 1, \cdots, J)$ を記述し直しておく．そして原点の周りを刻み角度 $\Delta\theta = 2\pi/K$ (K は大きな整数) で走査して

$$s(u, v) = c \quad (c \geq s(0, 0)) \tag{7}$$

の等高線を描くものとする．そのために

$$(u, v) = (z\cos\theta, z\sin\theta) \tag{8}$$

なる極座標系 (z, θ) を設ける．そして函数 f を

$$f(z) = s(z\cos\theta, z\sin\theta) - c \tag{9}$$

と定義し，$f(z) = 0$ を満たす z を θ 毎に Newton 法で求めればよい．$f(z)$ は凸函数だから Newton 法の収束に問題はない．しかし，特に高速に算出するためには，その初期値を工夫しておく必要がある．以下に述べるのは極めて素朴な1次近似による方法である．

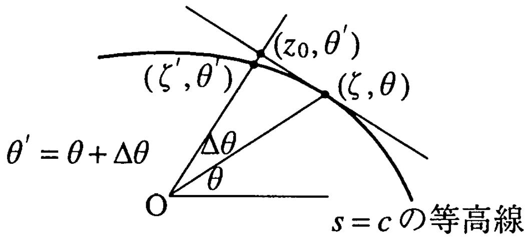

図 1: 等高線描画時のNewton法における初期値.

いま角度がθのときに$f(\zeta) = 0$とする．そして角度$\theta' = \theta + \Delta\theta$($\Delta\theta$は微小な増分)では$f(\zeta') = 0$としよう(図1)．また，点$(\zeta, \theta)$における等高線への接線と，角度$\theta'$の直線との交点を，$(z_0, \theta')$とする．$z_0$は$\zeta'$の1次近似であるが，これを求めておこう．$s(u, v) - c = 0$に陰函数定理を適用すれば

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -\frac{\partial s/\partial u}{\partial s/\partial v} = -\frac{s_u}{s_v} \tag{10}$$

が得られる．ただし偏微係数は次の通り：

$$s_u = \sum_{j=1}^{J} \frac{w_j(u - x_j)}{r(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_j)}, \quad s_v = \sum_{j=1}^{J} \frac{w_j(v - y_j)}{r(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_j)}. \tag{11}$$

さて，点(z_0, θ')は，(ζ, θ)を原点とする接線方向のベクトルと，原点から発する角度θ'の直線との交点である．したがって，これを求めると次の通り：

$$z_0 = \zeta \cdot \frac{s_v \sin\theta + s_u \cos\theta}{s_v \sin\theta' + s_u \cos\theta'}. \tag{12}$$

以上をまとめると次の通りである：

等高線描画アルゴリズム

(i) $k = 1$

(ii) $\theta_k = 0$とし，$z_0 =$ (適当な正数) と置いた上で，$f(z) = 0$を$z_{n+1} = z_n - f(z_n)/f'(z_n)(n = 0, 1, \cdots)$なるNewton法で解き，解を$\zeta_1$とする．

(iii) $k = k + 1$とする．

(iv) $\theta_k = k\Delta\theta$.

(v) $z_0 = \zeta_{k-1} \cdot \dfrac{s_v \sin\theta_{k-1} + s_u \cos\theta_{k-1}}{s_v \sin\theta_k + s_u \cos\theta_k}$.

(vi) $f(z) = 0$を$z_{n+1} = z_n - f(z_n)/f'(z_n)(n = 0, 1, \cdots)$なるNewton法で解き，解を$\zeta_k$とする．

(vii) $k = K$ならば(viii)へ．$k < K$ならば(iii)へ．

(viii) $(\zeta_1, \theta_1), (\zeta_2, \theta_2), \cdots, (\zeta_K, \theta_K), (\zeta_1, \theta_1)$を順に直線分で結んで等高線を描く．

5. rが2乗距離の場合の記述

2点間の距離を

$$r(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{x}) = (u - x)^2 + (v - y)^2 \tag{13}$$

と定義すると重み付き距離は次の通りに記述される：

$$\begin{aligned} s &= \sum_{j=1}^{J} w_j\{(u - x_j)^2 + (v - y_j)^2\} \\ &= (u - \overline{x})^2 + (v - \overline{y})^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \end{aligned} \tag{14}$$

ただし$\overline{x}$ならびに$\overline{y}$はx_jならびにy_jの平均であり，σ_x^2ならびにσ_y^2はx_jならびにy_jの分散である($\overline{x}$とσ_x^2についてのみ記しておく)：

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{J} w_j x_j, \quad \sigma_x^2 = \sum_{j=1}^{J} w_j (x_j - \overline{x})^2. \tag{15}$$

これにより次のことが分かる：

(a) sの定義域は$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 \leq s$である(等号は$(u, v) = (\overline{x}, \overline{y})$のときに成立する)；

(b) sを固定した等高線は，中心が$(\overline{x}, \overline{y})$で半径が$\sqrt{s - \sigma_x^2 - \sigma_y^2}$の円周で与えられる．

また，重み付き距離がs以下であるような利用者の位置(u, v)の集合の面積を$A(s)$とすると

$$A(s) = s - \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \tag{16}$$

となる．これは，いわば分布函数に当たるものであり，微分したもの(これを$a(s)$とする)は密度函数に当たる：

$$a(s) = A'(s) = 1. \tag{17}$$

このように，重み付き距離sの密度函数は(地区の形状による境界条件を無視すれば)一様である．

6. 展望

- 好みの頻度を入力すれば即時的に等高線が描写されるシステムを作成することにも意味がある→居住地選択(不動産取得)のためのGIS！
- 等高線による視覚的な表現だけでなく，重みづき距離sの分布や特性値を導出するシステムを作成すれば，地区計画に資するに相違ない(密度函数の計算には数値微分が有効であろう)．
- 複数施設を周回する距離に着目した等高線分析や距離分布の導出を追求することにも意味がある．

7. 参考文献

[1]C.A.ペリー(1929)：近隣住区論(倉田和四生訳)，鹿島出版会(1975)．(C.A.Perry(1929): The Neighborhood Unit in *Regional Survey of New York and its Environs*, Vol.7:*Neighborhood and Community Planning*, Nonograph One)
[2] 都市計画教育研究会編(1995)：都市計画教科書(第2版)，彰国社．
[3] 栗田　治(1996)：領域間平均距離の近似理論と都市分析への応用，筑波大学社会工学研究科博士論文．
[4] 栗田　治(1989)：都市内領域からの平均距離の等高線図ー厳密な作図法と近似作図法ー，日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集，1ーBー2，pp.38ー39.