環状搬送システムの母関数法による数値解析

01201380 ＊ 上智大学 鈴木 誠道 SUZUKI Shigemichi
上智大学 楢崎 真理 MARI Narasaki

1 はじめに

自動搬送システムとは、搬送車が定められたコース上を動き、コース上に設けられた幾つかのステーションにおいて自動的に荷物の積み降ろしを行うシステムの事である。近年、生産技術の進歩や生産無人化が進むにつれ、工場における自動生産システムや自動倉庫において自動搬送システムはその重要性を増してきている。円環状搬送システムに関しては過去に様々な研究がなされているが、厳密解が求まるケースは少ない。２ステーションで非対称の場合や３ステーション以上では到着ステーションが空の確率のみ、２ステーション対称の場合に限って到着および反対側のステーションの平均待ち行列長と空の確率が求められている。したがってその特性値を求めるにはシミュレーション、近似解法に頼らざるを得ない。近似解法には母関数の値を多次元空間中の離散的な点（格子点）で求める方法が考えられる。これは連立方程式を解くことに帰着される。この方法は格子点を増やすことで近似の精度を上げられるがステーション数が増えると連立方程式の変数が指数的に増加する。この論文の目的は変数の増加を押さえ精度を保つ方法を提言することである。

2 モデル化

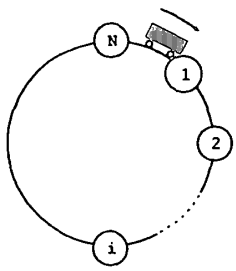

図 1: Circular Transfer system model

図1に示すようにシングルサーバが複数のステーション（待ち行列）を一方方向に巡回しているシステムを考える。

- システムには、n 個のステーションが存在する。
- 各ステーションに客は到着率 λ のポアソン分布に従い到着する。従ってシステム全体の客の到着率は $n\lambda$ である。
- ステーションの待ち容量は無限とする。
- ポーリング時点にステーションに客が１人以上いると、サーバはそのうち１人のサービスを行う。このサービス時間は一定で w とする。サーバは確率 r_j で現在いるステーションから進行方向に j 番目のステーションに移動する。
- ポーリング時点でステーションが空であった場合は、サーバはサービスを行わず隣のステーションに移動する。
- サーバがあるステーションから隣のステーションまで移動するのに要する時間を一定時間 v とする。すなわちサーバが現在いるステーションから j 番目のステーションに移動する時間は jv となる。

3 解析

ポーリング時点でサーバがいるステーションの待ち行列長を m_1、さらにこのステーションを１番目としてサーバーの進行方向に２番目…、n 番目のステーションの待ち行列長をそれぞれ $m_2, \cdots m_n$ で表わすと、状態 $(m_1, m_2, \cdots m_n)$ はマルコフ性を持つ。従って状態 $(m_1, m_2, \cdots m_n)$ である確率を
$P(m_1, m_2, \cdots m_n)$ とするとその平衡状態方程式から確率母関数の満たす関係式は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
F(z_1, z_2, \quad \cdots \quad, z_n) = \\
& e^{\lambda v(z_1+\cdots+z_n-n)} F(0, z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}) \\
& \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{z_i} r_{n+1-i} e^{\lambda t_{n+1-i}(z_1+\cdots+z_n-n)} \\
& \times [F(z_i, \cdots, z_n, z_1, z_2, \cdots, z_{i-1}) \\
& -F(0, \cdots, z_n, z_1, z_2, \cdots, z_{i-1})] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

式 (1) について離散的な Z の値に対して立てた連立方程式を解く事で、母関数が近似的に求められるが、その方法ではステーション数の増加に伴

い、連立方程式の数も指数的に増加するため、解法に述べる4通りの方法で近似を行った。また、式(1)より得られるn本の関係式より到着ステーションが空である確率 p_0 の厳密値は次のようになる。

$$p_0 = F(0,1,\cdots,1) = \frac{1-n\lambda T_1}{n\lambda v - n\lambda T_1 + 1} \qquad (2)$$

この値と近似連立方程式により求めた p_0 の近似値を比較する事で、数値的に求めた母関数値 $F(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ の妥当性を確かめ、厳密解の求まっていない特性値求めることができる。その特性値の一つとして到着ステーションの平均待ち行列長は、母関数を用いて次のように表わされる。

$$m_1 = \frac{\partial F(z_1, z_2, \cdots, z_n)}{\partial z_1}\Big|_{z_1=\cdots=z_n=1} \qquad (3)$$

4 解法

近似連立式を解く方法としてGauss-Seidelの反復法を用い、格子点のとり方を次の4通りのように変化させた。

- 格子点をEvenに取る方法（方法1）
- 格子点をUnevenに取る方法(方法2)
- 線上の離散点における母関数の値だけを未知数としEvenに取る方法(方法3)
- 線上の離散点における母関数の値だけを未知数としUnevenに取る方法(方法4)

例としてn=3の場合の格子点の状態を図2から図5に表わす。

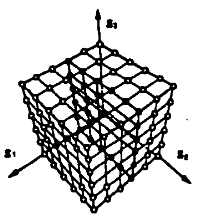

図2: 方法1

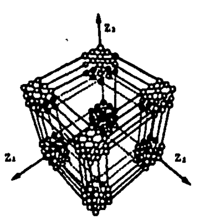

図4: 方法2

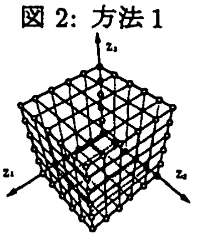

図3: 方法3

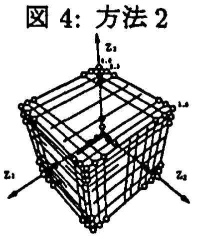

図5: 方法4

5 数値例

解析結果の一例としてn=4,v=0.5,w=0.0で解析を行った結果を図6, 図7に示す。
図6からこの4通りの近似法はかなり近い値を帰すことが確認でき、その値を使って到着ステーションの平均待ち行列長を求めた結果を図7に示した。方法4が最も良い結果を与えている。

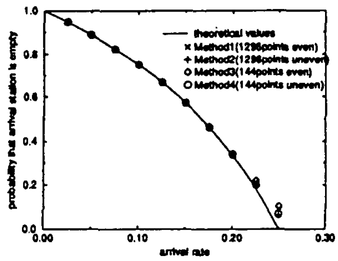

図6: Probability that arrival station is empty

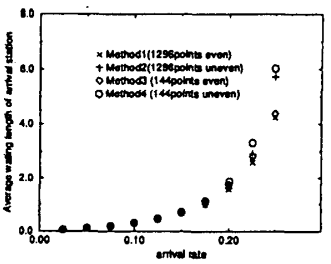

図7: Average wating length of arrival station

6 おわりに

本研究では近似方法として4通りの政策をあげた。特性値を求める際zの値が0, または1付近の母関数値を使うため、0,1付近の近似を細かくする方法が適している。また、ステーション数がn個の場合方法1,2に必要な計算量は 6^n なのに対し、方法3,4の計算量は $2^n \times (2n+1)$ である。ステーション数が大きくなるほど、この方法が有効であることが分かった。なおここに示した方法は到着率、移動時間、作業時間がステーションによって異なる非対称の場合にも拡張できる。

参考文献

[1] 津金、山下、鈴木：確率順序に従う1-制限式ポーリングシステムについて: 情報通信ネットワークに関する性能評価モデルの総合的研究シンポジウム報文集 (1994).p56-p66.

[2] 津金英行：環状システムのモデル化と解析 :Master's thesis, 上智大学理工学研究科機械工学専攻 (1995).