連続型競合ハブ配置問題

京都大学 ○佐々木 美裕 SASAKI Mihiro
京都大学 福島 雅夫 FUKUSHIMA Masao

1 はじめに

ハブ・スポークモデルに関する研究は, O'Kelly の論文 [5] に始まる. 90 年代前半までは, O'Kelly のモデルに対する新しい近似解法の提案が研究の中心であった. 最近では, single-allocation を前提としている O'Kelly のモデルに加え, multiple-allocation の p-hub メディアン問題 [1] に関する論文が多数発表されている. また, アルゴリズムの開発よりも, 新しい定式化を与える研究が注目されている. 連続緩和問題の最適解が整数解となる可能性を大きくするために, よりきつい制約条件を導入したモデル [6], 変数と制約条件の数を減らすために多品種流問題として定式化したモデル [2] などがその例である.

このように, ハブの配置問題も研究の方向性が多様化しているが, multiple-allocation モデルで共通している点の 1 つは, 「会社にとって最もコストがかからないルートをすべての乗客が利用する」と仮定していることである. 実際には, 乗客は会社のコストを考えてルートを選択するのではなく, 各乗客の好みによって選択するので, この仮定を用いることは, 適切とは言い難い. また, 「市場をすべて独占できる」ことを仮定として用いているモデルも多い. 実際に市場に参入するに場合, 一般的に, 他社が参入している状況の方が多く, 他社との競合が起こるのは必然である. 従って, 競合ハブ配置問題を考えることは重要であると思われる.

以上のような状況をふまえ, 本稿では, 競合する相手がいる場合のハブ配置問題のモデル化について考え, 2 段階最適化問題として定式化する.

2 モデルの説明

A 社と B 社の 2 社が競合するハブの配置問題を考える上で, 以下の項目を考慮する.

- 需要点は離散的に分布しており, OD ペアごとの需要は対称で, 既知とする.
- ハブは平面上の任意の点に配置可能とする. また, ハブは経由するためだけの施設とし, ハブ自体に需要は存在しないものとする.
- ルートは, すべて 1-stop とし, 直行便や 2-stop 以上のルートはないものとする.
- OD ペアが同じであれば, 経由地に関わらず, ルートの価格 (運賃) は同じとする.
- 現在, A 社と B 社が市場に参入しており, それぞれ, p_0 個, q_0 個のハブを既に配置してルートをサービスしている.
- 新たに A 社が p 個のハブを配置することを計画している.
- A 社が p 個のハブを配置したあと, B 社は A 社のハブの配置を知った上で q 個のハブを新たに配置するものとする.
- どの会社のハブにも容量制約はないものとする.
- 会社側の費用に関しては, ハブの設置費用と枝に関する費用を考慮する.
- A 社, B 社ともに目的は利益の最大化である.

3 定式化

前節までで述べたことをまとめ, 定式化を行う. A 社の決定変数は以下の通りである.

$x_k (k=1,\ldots,p)$: A 社が新たに設置するハブの座標, $x_k \in \Re^2$.

同様にして, B 社の決定変数を次のように表わす.

$y_l (l=1,\ldots,q)$: B 社が新たに設置するハブの座標, $y_l \in \Re^2$.

また, 次の記号を定義する.

- N: 需要点の集合,
- d_i: 需要点 $i \in N$ の座標, $d_i \in \Re^2$,
- Π: OD ペアの集合,
- w_π: OD ペア $\pi \in \Pi$ の需要,
- F_π: OD ペア $\pi \in \Pi$ に対する価格 (運賃),
- a_r: すでに配置されている A 社のハブの座標, $r=1,\cdots,p_0,\ a_r \in \Re^2$,
- b_s: すでに配置されている B 社のハブの座標, $s=1,\cdots,q_0,\ b_s \in \Re^2$,
- α_i: 出発地が i である OD ペアの集合,
- $h(z)$: $z \in \Re^2$ にハブを設置するための設置費用,

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

$c(\| d_i - z \|, \rho)$: 需要点 i とハブ $z \in \Re^2$ 間の費用関数, ただし, ρは2点間のフロー,

$D_\pi(z)$: $\| z - d_i \| + \| z - d_j \|$, ただし, $\pi = (i,j)$.

ここで, $\| \cdot \|$ は, ユークリッド距離を表す. 各ODペアごとに提供されている各ルートへの乗客の配分は, ロジット関数[4]に従うものとする. ロジット関数は, サービスの魅力度や便利さによって需要がどのように配分されるかを表わす関数として用いるのに適しているといわれている. ここでは, ルートの便利さを表す値としてルートのユークリッド距離に-1をかけた値を用いることとする. すなわち, ODペア$\pi = (i,j)$に, ($d_i \to$ ハブ $z \to d_j$) というルートがサービスされているとき, このルートの便利さは, $-D_\pi(z)$ で表わされ, このルートを利用する乗客数は, $\theta_\pi(x,y)\exp[-D_\pi(z)]$ となる. ただし,

$$\theta_\pi(x,y) = \frac{w_\pi}{\Phi_\pi(x) + \Psi_\pi(y) + \lambda_\pi + \mu_\pi},$$

$$\Phi_\pi(x) = \sum_{k=1}^{p} \phi_\pi(x_k), \quad \phi_\pi(x_k) = \exp[-D_\pi(x_k)],$$

$$\Psi_\pi(y) = \sum_{l=1}^{q} \psi_\pi(y_l), \quad \psi_\pi(y_l) = \exp[-D_\pi(y_l)],$$

$$\lambda_\pi = \sum_{r=1}^{p_0} \exp[-D_\pi(a_r)], \quad \lambda_{\pi r} = \exp[-D_\pi(a_r)],$$

$$\mu_\pi = \sum_{s=1}^{q_0} \exp[-D_\pi(b_s)], \quad \mu_{\pi s} = \exp[-D_\pi(b_s)],$$

である. A社の問題は次のようにStackelberg型の2段階最適化問題として定式化できる.

[問題 CHLP]

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & f(x,y) \\ \text{s.t.} & x \in X \subseteq \Re^{2p} \\ & y \in \arg\max\{g(x,y) | y \in Y \subseteq \Re^{2q}\} \end{array}$$

ただし, X, Yは, それぞれ x, y の実行可能領域であり, $f(x,y)$ と $g(x,y)$ はそれぞれ以下のように定義される関数である.

$$f(x,y) = \sum_{\pi \in \Pi} F_\pi \theta_\pi(x,y)(\Phi_\pi(x) + \lambda_\pi)$$
$$- \sum_{i \in N} \left[\sum_{k=1}^{p} c\left(\| d_i - x_k \|, \sum_{\pi \in \alpha_i} \theta_\pi(x,y)\phi_\pi(x_k) \right) \right.$$
$$\left. + \sum_{r=1}^{p_0} c\left(\| d_i - a_r \|, \sum_{\pi \in \alpha_i} \theta_\pi(x,y)\lambda_{\pi r} \right) \right] - \sum_{k=1}^{p} h(x_k).$$

$$g(x,y) = \sum_{\pi \in \Pi} F_\pi \theta_\pi(x,y)(\Psi_\pi(y) + \mu_\pi)$$
$$- \sum_{i \in N} \left[\sum_{l=1}^{q} c\left(\| d_i - y_l \|, \sum_{\pi \in \alpha_i} \theta_\pi(x,y)\psi_\pi(y_l) \right) \right.$$
$$\left. + \sum_{s=1}^{q_0} c\left(\| d_i - b_s \|, \sum_{\pi \in \alpha_i} \theta_\pi(x,y)\mu_{\pi s} \right) \right] - \sum_{l=1}^{q} h(y_l).$$

$f(x,y), g(x,y)$ とも, 第1項が会社の総売上を表わしており, 第2項と第3項は, それぞれ枝に関する費用の総和とハブの設置に必要な費用の総和を表わしている.

4 おわりに

本稿では, 会社の利益最大化を目的とした連続型競合ハブ配置問題のモデルを提案し, 2段階最適化問題として定式化した. このような2段階の問題を含むMPEC (Mathematical Programs with Equilibrium Constraints)[3] という広いクラスの問題が最近活発に研究されている. しかし, MPECに関しては, 実用化を目指した研究は端緒についたばかりであるといえる. 今後はこの問題を効率よく解くことが最大の目標である. 詳細については当日発表する.

参考文献

[1] J. F. Campbell: "Integer programming formulations of discrete hub location problems", *EJOR* 72, 1994, pp. 387–405.

[2] A. T. Ernst and M. Krishnamoorthy: "Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem", *EJOR* 104, 1998, pp. 100–112.

[3] Z. Q. Luo, J. S. Pang and D. Ralph: *"Mathematical Programs with Equilibrium Constraints"*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[4] D. McFadden: "Conditional logit analysis of qualitative choice behavior", *Frontiers in Econometrics*, Academic Press, NY, pp. 105–142, 1975.

[5] M. E. O'Kelly: "A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities", *EJOR* 32, 1987, pp. 393–404.

[6] D. Skorin-Kapov, J. Skorin-Kapov and M. O'Kelly: "Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems", *EJOR* 94, 1996, pp. 582–593.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.