1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

待ち行列への最適参入時期問題

01107945　*小柳　淳二　(KOYANAGI Junji)　鳥取大学工学部
01103205　河合　一　(KAWAI　Hajime)　鳥取大学工学部

1　はじめに

ある作業を行うため待ち行列に並ばなければいけない場合に，他にも作業を抱えている人は，他の作業を行いながら行列の様子を観測し，行列が短くなったときに行列に加わるという行動を取る場合がある．本研究ではこのような状況において総作業時間の最小化という観点から最適政策を考える．本研究で扱っているような状況としては、自分の机でできる仕事がいくつかあり、それとともに、共同で使用している、コピー機械のようなものを使用しなければいけない仕事を抱えている人が、最も早く仕事を終らせたいというような場合が考えられる。

2　モデル

L 個の作業 A と 1 個の 作業 B をまかされている作業者がいるとする．作業 A は作業者専用の場所が存在し，任意の時間に処理を行うことができ，作業 1 つを処理する時間は一般分布 $G(x)$ （平均 γ^{-1}）にしたがっているものとする．作業 B を行うためには他の作業者と共同で利用している共有設備を使うことが必要であり，それが他の作業者によって使用されているとき，行列に並んで順番を待つことができるが、並んでいる間に作業 A を行うことはできないものとする。共有設備の使用時間は、平均処理時間 μ^{-1} の指数分布に従い，それを使用する人の到着率は待ち行列長が i の時 λ_i とする。

作業者は作業 A を一つ処理するごとに共有設備を観測し，待ち行列に加わるかどうかを決定することができる。作業 A が残っているときに行列に加わることを決定したならば、作業 B を終えるまで、作業 A は再開できないものとし、作業 A を全て終えたときには作業者は待ち行列に加わるものとする。作業 A の残り数を l、共有設備の行列長を i として、(l,i) の組を状態と考え、2 種類の作業を終えるまでの総期待処理時間を最小にするように、共有設備に並ぶことを考える。

3　定式化

関数 $V(l,i)$ を最適総期待処理時間とすると、次の最適性方程式を満たす。

$$\begin{aligned} &V(l,i) \\ &= \min\left\{\int_0^\infty \left(x+\sum_{j=0}^\infty P_{ij}(x)V(l-1,j)\right)dG(x),\right. \\ &\qquad\qquad \left. l/\gamma+(i+1)/\mu\right\} \quad (l\geq 1) \qquad (1) \end{aligned}$$

$$V(0,i) = (i+1)/\mu \qquad (2)$$

ここで、$P_{ij}(x)$ は行列長が i から x 時間後に j に変化する確率である．また，$Q_i(x)$ として，待ち行列人数が i の状態から x 時間後の期待人数，すなわち

$$Q_i(x) = \sum_{j=0}^\infty jP_{ij}(x)$$

を定義する

仮定として λ_i が i に関して減少とすると $P_{ij}(x)$ と $Q_i(x)$ に以下の性質が成り立つ．

補題 1 任意の i, k, x に対して

1. $\sum_{j=k}^\infty [P_{i+1j}(x) - P_{ij}(x)] \geq 0,$
2. $Q_{i+1}(x) - Q_i(x) \leq 1.$

が成立する．

これらの性質を用いて以下の補題が証明できる。

補題 2 $V(l,i)$ は次の性質を満たす．

1. $V(l+1,i) - V(l,i) \leq 1/\gamma,$
2. $V(l,i+1) - V(l,i) \leq 1/\mu.$

上の補題から次の定理を得る．

定理 1 もし，ある (l,i) で行列に加わるのが最適ならば (m,n), (ただし $(m \leq l, n \leq i)$) でも加わることが最適である．

数値例

仕事 A の初期仕事数 $L=7$, 仕事 A の処理時間分布が一定分布で $\gamma^{-1}=10.0$, 共有設備の処理率 $\mu=1.0$, 待ち行列長に対する到着率がそれぞれ

$\lambda_0=0.9$, $\lambda_1=0.9$, $\lambda_2=0.9$, $\lambda_3=0.9$, $\lambda_4=0.8$,

$\lambda_5=0.7$, $\lambda_6=0.7$, $\lambda_7=0.7$, $\lambda_8=0.7$, $\lambda_9=0.7$,

$\lambda_i=0$ $(i\geq 10)$ の時の最適政策を計算する.

最適政策

（1 は共有設備に並び, 0 は並ばないことを示す.）

共有設備の人数								
10	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
	0			作業 A の残数				7

最適期待処理時間

10	11.000	16.701	24.828	33.774	43.108	52.653	62.329	72.093
9	10.000	16.440	24.690	33.691	43.053	52.614	62.301	72.071
8	9.000	16.020	24.465	33.554	42.961	52.549	62.254	72.036
7	8.000	15.526	24.196	33.388	42.850	52.470	62.197	71.993
6	7.000	15.026	23.918	33.215	42.732	52.386	62.137	71.947
5	6.000	14.571	23.659	33.052	42.620	52.306	62.079	71.903
4	5.000	14.194	23.438	32.911	42.522	52.236	62.028	71.864
3	4.000	13.876	23.248	32.787	42.436	52.174	61.982	71.829
2	3.000	13.000	23.000	32.681	42.362	52.120	61.943	71.798
1	2.000	12.000	22.000	32.000	42.000	52.000	61.914	71.776
0	1.000	11.000	21.000	31.000	41.000	51.000	61.000	71.000
	0	1	2	3	4	5	6	7