1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Value At Risk 評価のためのモンテカルロ・シミュレーションの適用

01505910 慶應義塾大学 批々木 規雄 HIBIKI Norio

1 はじめに

多種の金融資産のポートフォリオのリスク量を計測するために、VAR(Value At Risk) が用いられる。VAR を評価するための一つの方法にモンテカルロ・シミュレーションがある。各資産の変動は正規分布をすると仮定することが多く、多資産のリスク評価をモンテカルロ・シミュレーションで行うためには、多次元の正規乱数を生成する必要がある。相関を持つ金融資産を取り扱うためには、独立な多次元正規乱数に相関係数行列をコレスキー分解した行列(下三角行列) をかければ良い。ところが、実際に計算機を使って多次元標準正規乱数系列を作る場合、独立な乱数を作れるとは限らず、結果的に変換後の乱数の相関の精度も良くない可能性が高い [1] 。そのため、どのような乱数を生成し、利用するかが結果に大きな影響を与えると考えられる。そこで、次の2つの問題を考える。

(1) 独立な標準正規乱数をどのように生成するか?

(2) n 個の独立な標準正規乱数が生成されたとき、各変数にどの乱数系列を割り当てるかによって、結果が変わらないのか？

(1) の問題に対する対処法として、Barraquand [1] は Quadratic Resampling(QR) 法によって相関を正確に合わせる方法を示し、多資産の価格に依存するヨーロピアン・オプションの価格評価を行っている。また、Curran [2] は相関が 0 になるような多次元乱数を生成するための方法を示し、アジア・オプションのような経路依存型の証券の価値評価を行っている。本研究では、QR 法を VAR 計測に適用した場合の効果を確かめる。

一方、(2) の問題は取り扱う問題によっては大きな影響を及ぼす可能性がある。例えば、相関係数 ρ を持つ2資産から構成されるポートフォリオの VAR を計測する問題を考える。独立な標準正規乱数を X_1, X_2 とすると、相関係数 ρ を持つ2次元標準正規乱数 Y_1, Y_2 は次のように表現できる。

$$Y_1 = X_1 \tag{1}$$

$$Y_2 = \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2} X_2 \tag{2}$$

Y_1, Y_2 を生成するとき、X_2 よりも X_1 の影響が大きいことが分かる。したがって、X_2 よりも X_1 の方により精度の高い乱数を用いた方が良いと考えられる。VAR はある確率を示すパーセント点における損益を表すので、尖度 (4 次モーメント) の精度に影響を受ける。そこで、本研究では、VAR を計測する場合に、尖度が 3 に近い正規乱数系列が精度の高い乱数と考えて、その精度の高い順番に VAR 計測に大きい影響を与える変数に割り当てていく方法を提案する (以降、KC(Kurtosis Control) 法と呼ぶ)。

[1] 期待値が 0、分散が 1 になるような標準正規乱数はモーメント・マッチング法を使うことによって生成できる。対称変量法を使うことによって、歪度も修正することなく、0 にすることができる。

2 Quadratic Resampling (QR) 法

生成した n 次元正規乱数 (行列) を $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ とする。生成された Z には相関係数行列 D で表される相関があるとする。D をコレスキー分解すると、下三角行列 E $(D = EE^T)$ を得る。独立な乱数 (行列) を X とすると、Z の相関係数は次のように計算できる。

$$Z^T Z = \left(XE^T\right)^T \left(XE^T\right) \tag{3}$$

相関係数行列 C を持つ n 次元正規乱数 Y を Z を用いて表現する。ここで、C をコレスキー分解して得られる行列を A $(C = AA^T)$ とし、$A = BE$ とする。

$$Y^T Y = \left(ZB^T\right)^T \left(ZB^T\right) \tag{4}$$

$B = AE^{-1}$ を用いて (5) 式により修正すれば、相関の合う n 次元標準正規乱数を生成することができる。

$$Y = ZB^T \tag{5}$$

相関係数行列を I とすると、$A = I$ となるので、修正行列 B に E^{-1} を用いることによって、独立な多次元正規乱数を生成することも可能である。

3 Kurtosis Control (KC) 法

VAR はある確率を示すパーセント点における損益を表すので、尖度の精度の影響を受ける。そこで、尖度が3に近い正規乱数系列の方が、より正確に VAR を計測できると考えられる。相関係数行列をコレスキー分解することによって生成した下三角行列を用いて線形変換した乱数系列の尖度ができるだけ3に近い値をとる方が良いのだが、線形変換された乱数の尖度はもとの乱数の尖度と線形関係にはない。しかし、ある乱数の組み合わせ比率を大きくすると、その乱数の尖度に近づきやすいといったある程度の関係があると思われる。そのため、尖度が3に近い乱数系列を VAR 計測に大きな影響を与える変数に割り当てる方が良い結果になる可能性が高い。

その簡便な方法として、行列 A (相関係数行列をコレスキー分解して得られる行列) の各列の絶対値和をとることによって、値の大きい順に尖度が3に近い乱

数を割り当てることを考える。生成した3次元正規乱数を尖度の精度の高い順(3に近い順番)に並び替えることによって、相関を持つより良い乱数が作れると思われる。

4. Value At Risk 計測への適用

4.1 取り扱う問題と実験手順

株式、債券、CB の3資産のポートフォリオの VAR を計測する。各資産はインデックスに投資する。各資産の平均、標準偏差、相関係数は次の通りである。

	$\bar{R}_i$	σ_i	ρ_{ij}	株式	債券	CB
株式	0.8108%	5.5602%	株式	1.0000	0.1446	0.7594
債券	0.6239%	1.3627%	債券	0.1446	1.0000	0.3269
CB	0.7708%	3.5121%	CB	0.7594	0.3269	1.0000

各資産とも正規分布に従うと仮定し、次の2種類のポートフォリオの VAR を計測する。

	株式	債券	CB
ポートフォリオ 1	40%	40%	20%
ポートフォリオ 2	30%	35%	35%

ポートフォリオの収益率は正規分布に従うので、各ポートフォリオの平均、標準偏差、ならびに VAR に相当するパーセント点の理論値は次のようになる。ここでは、1%点、5%点、10%点を計測する。

	平均	標準偏差	パーセント点		
			1%	5%	10%
1	0.7280%	2.9514%	−6.1418%	−4.1255%	−3.0501%
2	0.7314%	2.8720%	−5.9537%	−3.9916%	−2.9452%

VAR を計測する手順は次のように行う。シミュレーションは、S 言語を使って行った。

(手順 1) 3次元標準正規乱数を n 個生成する [2]。

(手順 2) 設定した平均、標準偏差、相関を持つような乱数に変換し、各資産の収益率を計算する。QR 法とKC 法の適用の有無によって4種類のケースを行う。

		KC法	
		適用する	適用しない
QR法	適用する	QR–KC	QR–nKC
	適用しない	nQR–KC	nQR–nKC

(手順 3) ポートフォリオの収益率を計算する。

(手順 4) VAR 計測に対するQR 法とKC 法の効果を調べるために、各ポートフォリオについて、手順1～手順3 を 1,000 回繰り返し、理論値と比較する。

乱数の数を1,000個(ケース1) と 10,000個(ケース2) の2種類のケースをそれぞれ2回行う。

[2] 対称変量法によって精度を上げるため、乱数 $n/2$ 個と、その負符号をつけたものを加えた n 個の乱数を生成する。

4.2 結果および考察

各ポートフォリオの VAR に相当するパーセント点(1%, 5%, 10%) の理論値とシミュレーション値の差(誤差:「シミュレーション値−理論値」)の絶対値平均を表1に示す。紙面の都合上、ケース2のみの結果を示す。

表 1: VAR の誤差の絶対値平均(ケース2)

ポートフォリオ1		QR–KC	QR–nKC	nQR–KC	nQR–nKC
1%点	1回目	0.0597	0.0665	0.0635	0.0698
	2回目	0.0611	0.0682	0.0648	0.0710
5%点	1回目	0.0291	0.0294	0.0323	0.0327
	2回目	0.0296	0.0294	0.0327	0.0321
10%点	1回目	0.0209	0.0233	0.0242	0.0262
	2回目	0.0221	0.0236	0.0250	0.0262
ポートフォリオ2		**QR–KC**	**QR–nKC**	**nQR–KC**	**nQR–nKC**
1%点	1回目	0.0597	0.0649	0.0649	0.0714
	2回目	0.0615	0.0676	0.0683	0.0728
5%点	1回目	0.0274	0.0286	0.0327	0.0344
	2回目	0.0282	0.0282	0.0341	0.0339
10%点	1回目	0.0216	0.0227	0.0265	0.0268
	2回目	0.0222	0.0231	0.0265	0.0268

QR 法を適用すると、VAR に相当するパーセント点は平均的に良くなる。Barraquand [1] やCurran [2] はオプション評価における有効性を指摘したが、VAR 計測においてもその有効性を示すことができた。一方、KC 法を適用すると、1%点と10%点については平均的に改善され、その効果を見ることができる。しかし、5%点についてはその効果はほとんど見られない。

5 おわりに

本研究では金融資産のリスク量のポートフォリオを計測するために用いられる Value At Risk(VAR) を評価するために、モンテカルロ・シミュレーションを用いるときの改善方法を示した。QR 法はVAR 計測においても有効であることが分かった。また、本研究で提案したKC 法も 1%点と10%に関しては改善することを示した。特に、VARは99%信頼区間で計測することが多いので、1%点を改善するKC 法はある程度有効であることが分かった。KC 法による計算量の増加は各乱数系列の尖度を計算し、並び替えるだけである。KC 法は、その計算手続きが極めて簡単でありながら、改善効果を得られるという点で、実務的にはかなり有効であると思われる。しかし、5%点ではあまり改善しないなど、理論的な説明力が不足している点を今後解明する必要がある。

参考文献

[1] J.Barraquand : Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate European Securities, Management Science, 41(1995).

[2] M.Curran : Recovering Identity, Risk, 9(1996).

[3] 伏見正則 : 乱数, 東大出版会, 1989.