1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

システムの複雑性に関する信頼性的考察

01400043　愛知工業大学　*中川 覃夫　NAKAGAWA Toshio
01701193　愛知工業大学　安井 一民　YASUI Kazumi

1 はじめに

近年，システムに対する高機能化や利便性の追求に伴って，ハードウェアやソフトウェアなどの複雑性が増大している[1,2].

ここでは，このようなシステム構成における物理的・論理的な複雑性の増大を数量的にとらえる一つの方法として，複雑度をそのシステムがもつパスの数によって表す．さらに，その複雑度が，システムの信頼性に及ぼす度合を表わすための関数（仮に，複雑度関数と呼ぶ）を定義し，典型的ないくつかの冗長システムの信頼度を計算する．特に，並列システムに対して，信頼度を最大にする最適コンポーネント数を求める．

2 システムの複雑性

信頼性の分野では，システム構成におけるコンポーネント数の増加に伴って，故障検出・切替機構等のハードウェアが増加し，システムそのものの信頼度が低下することが知られている[2]．しかし，一般の信頼性理論において，冗長システムの信頼度を計算する方法は確立されているが，システム構成に関わる複雑性を表す明確な定義はないように思われる．

ここでは，この問題を解決する一つの方法として，システムの複雑度をそのシステムがもつパスの数の関数として定義し，その信頼性に及ぼす度合をどのように表すかを考察する．また，結果の判別を容易にするため，種々の冗長システムの例題を与える．

2.1 複雑度の定義

2つのターミナルをもつ，システムのパス (Path) がいくつあるかを数える．そのとき，そのシステムの複雑度をパスの数 P_a と定義する．

例 1. 直列システム

コンポーネント数 n の直列システムを考える．この場合，パスの数は 1 であるので，$P_a = 1$ であり，n に無関係である．

例 2. 並列システム

コンポーネント数 n の並列システムの場合，パスの数は n であるので，$P_a = n$ である．

例 3. $k-out-of-n$ システム

n 個のコンポーネントの内 k 個以上が動作可能なシステムの場合，パスの数は $\binom{n}{k}$ であるので，$P_a = n!/[(n-k)!k!]$ である．特に，$2-out-of-3$ システムに対して，$P_a = 3$ となる．

例 4. 待機冗長システム

1 つのコンポーネントが動作し，$n-1$ 個のコンポーネントが待機する場合，パスの数は並列システムと同様と考えられるので，$P_a = n$ とする．

2.2 モジュールの複雑度

各モジュール (module) がいくつかのコンポーネントから形成され，モジュール M_i $(i = 1, 2, \cdots)$ の複雑度が $P_a(i)$ のとき，上述の定義によって次の結果を得る．

例 5. n 個の直列システム

このシステムのパスの数は，$P_a(1) \times P_a(2) \times \cdots \times P_a(n)$ であるから，システムの複雑度は，$P_a = \prod_{i=1}^{n} P_a(i)$ となる．すなわち，直列システムの複雑度は各々のモジュールの複雑度の積で表される．

例 6. n 個の並列システム

このシステムのパスの数は，$P_a(1) + P_a(2) + \cdots + P_a(n)$ であるから，システムの複雑度は，$P_a = \sum_{i=1}^{n} P_a(i)$ となる．すなわち，並列システムの複雑度は各々のモジュールの複雑度の和で表される．

3 複雑度関数

複雑性が，システムの信頼度に及ぼす度合を，関数 $R_c(P_a)$ と定義し，$P_a = 1$ のとき 1 から，$P_a =$

∞ のとき 0 になる減少関数と考える．例えば，$P_a = n$ のとき，次のような関数が考えられる．

$$R_c(n) = e^{-\alpha(n-1)} = q^{n-1}. \qquad (1)$$

ここで，$q \equiv e^{-\alpha}$ $(0 \leq \alpha < \infty, 0 < q \leq 1)$ とおく．とくに，$\alpha = 0$，$q = 1$ のとき，$R_c(n) \equiv 1$ となる．なお，$n = 1$ のとき，$R_c(1) = 1$ である．また，次のような関数も考えられる．

$$R_c(n) = e^{-\alpha(n-1)^\beta} = q^{(n-1)^\beta} \quad (\beta > 0). \qquad (2)$$

ここで，$\beta = 1$ のとき，式 (1) と同じ関数になる．

4 複雑度を考慮したシステムの信頼度

1 つのコンポーネントの信頼度を R_0，n 個のコンポーネントをもつシステムの信頼度を R とし，複雑度関数が $R_c(P_a) = q^{P_a-1}$ で与えられるとする．そのとき，複雑度を考慮したシステムの信頼度を $R_s \equiv R_c(P_a) \times R$ と定義する．

例 7. 直列システム

$P_a = 1$ より，どんな直列システムでも $R_c(P_a) = 1$．よって，$R_s = R_0^n$．すなわち，複雑度を考慮する必要がない．

例 8. 並列システム

$P_a = n$ より，$R_c(P_a) = q^{n-1}$．また，システムの信頼度は $R = 1-(1-R_0)^n$．よって，$R_s = q^{n-1}[1-(1-R_0)^n]$．

例 9. 多数決システム

$(n+1)-out-of-(2n+1)$ システム $(n = 1, 2, \cdots)$ の信頼度は，

$$R = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} R_0^k (1-R_0)^{2n+1-k},$$

であり，複雑度は，$P_a = (2n+1)!/[n!(n+1)!]$ より，

$$R_s = q^{P_a-1} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} R_0^k (1-R_0)^{2n+1-k}.$$

5 最適コンポーネント数

例題として，例 8 の並列システムについて，R_s を最大にする最適数 n^* を求めることを考えよう．

R_s の右辺を $Q(n)$ とおくと，$Q(1) = R_0$，$Q(\infty) \equiv \lim_{n\to\infty} Q(n) = 0$ となる．

$Q(n+1) - Q(n) \leq 0$ とおくと，

$$(1-R_0)^n \leq \frac{1-q}{1-q+qR_0}, \qquad (3)$$

を得る．よって，R_s を最大にする n^* は，式 (3) を満たす最小の n として求められる．

$q = e^{-\alpha}$ のとき，表 1 に，並列システムの R_s を最大にする n^* の数値例を示す．

表 1．並列システムの最適数 $n*$

Table 1 Optimal number n^* for a parallel system.

R_0	α				
	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$1-10^{-1}$	2	3	4	5	6
$1-10^{-2}$	1	2	2	3	3
$1-10^{-3}$	1	1	2	2	2

6 むすび

システムの複雑度を，システム自身がもつパスの数として表し，様々なシステムに対する複雑度を求めた．

その結果，直列システムは個々の複雑度の積，並列システムは個々の複雑度の和として表されることが示された．さらに，複雑度関数を定義し，複雑度を考慮したシステムの信頼度を求めた．

今後の研究課題として，

(i) 複雑度の定義は，現実的なモデルと比較して妥当といえるか．また，パスが求められない場合はどのように定義するのか．

(ii) 複雑度関数は，どのような関数形になるのか．

(iii) 複雑度関数のパラメータ α や q は，どのように推定したらよいか．

などの諸問題が考えられる．

参考文献

[1] 塩見 弘，“信頼性工学入門，” 丸善，1987.

[2] 南谷 崇，“フォールトトレラントコンピュータ，” オーム社，1991.