1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

最短経路数え上げ問題とその応用

1002750　政策研究大学院大学政策研究科　　大山達雄　　OYAMA Tatsuo

1　最短経路数え上げ問題 (SPCP)

n 個の頂点を有するネットワークにおいて、2頂点間の"距離"を表す各枝の"長さ"が与えられているとき、任意の1頂点から別の頂点に至る経路の長さ (経路に含まれる枝の長さの総和) が最小となる経路を最短経路という。このような最短経路をネットワーク上の任意の異なる2頂点間に対して求める。ネットワークの頂点の個数を n とすると、任意の異なる2頂点間の最短経路は全部で $n(n-1)$ 本存在する。このときそれぞれの枝がこれらの最短経路のうち何本に含まれるか (最短経路の重み) を全て数え上げる問題を最短経路数え上げ問題と呼ぶ。

2　SPCPに関する理論的結果

ネットワークシステムが特殊構造を有する場合、すなわち (1) 木構造、(2) 長方形格子状構造、(3) 扇形状構造、(3) 円環状構造 などの場合には、ネットワークのそれぞれの枝を含む最短経路の本数を陽に表すことができる。

In the grid type network $G(m,n)$, V_{kl} and H_{kl} indicate a vertical edge element connecting x_{kl} with x_{k+1l} and a horizontal one connecting x_{kl} with x_{kl+1}, respectively. Let the weight of the shortest paths of edge element e in $G(m,n)$ be $w(e)$.

定理　For a grid type network $G(m,n)$ the weights of the shortest paths with respect to edge elements V_{kl} and H_{kl} for $1 \le k \le m$ and $1 \le l \le n+1$ can be given as follows.

$$w(V_{kl}) = 2k(m-k+1)(n+1)$$

$$w(H_{kl}) = 2l(n-l+1)(m+1)$$

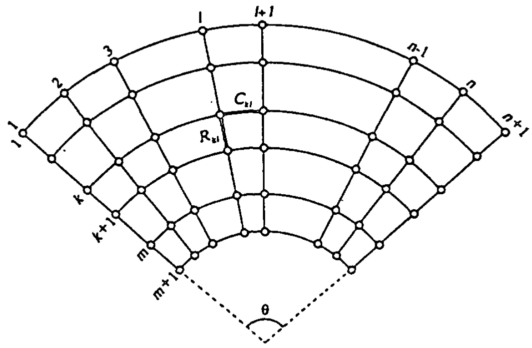
In the circular type network $K(m,n)$ with the polar angle θ consisting of $(m+1)(n+1)$ grid points, R_{kl} and C_{kl} indicate a radial edge element connecting the grid point x_{kl} with x_{k+1l} and a circular one connecting x_{kl} with x_{kl+1}, respectively.

定理　Let the polar angle θ satisfy $\theta > 2$ for a given circular type network $K(m,n)$. Let $p_0 = [\frac{2n}{\theta}]$ and $2p_0 < n+1$. Then the weights of edge elements R_{kl} and C_{kl} for $1 \le k \le m$ and $1 \le l \le n+1$ can be given as follows.

$$w(R_{kl}) = \begin{cases} 2k\{(m+1)(n+1) - k(l+p_0)\} \\ 2k\{(m+1)(n+1) - k(2p_0+1)\} \end{cases}$$

$$w(C_{kl}) = \begin{cases} (2k-1)l(2p_0+1-l) \\ (2k-1)p_0(p_0+1) \end{cases}$$

$$w(C_{m+1l}) = \begin{cases} 2(m+1)^2 l(n-l+1) \\ \quad - m^2 l(2p_0+1-l) \\ 2(m+1)^2 l(n-l+1) \\ \quad - m^2 p_0(p_0+1) \end{cases}$$



3　SPCPと交通政策分析

交通渋滞の原因は地理的要因、都市構造上の要因、産業上の要因、人的要因が考えられる。特に都市構造上の要因に着目すると、道路網の形態によって交通渋滞の程度は異なってくると思われる。道路ネットワークにおける各道路セグメントの重要度を求め、実際の道路交通量及び混雑度と比較を行うことにより、ネットワークの有効性を検討する。道路ネットワークの場合、枝の利用回数が示す重要度は交通需要（交通量）を表しており、重要度が高いものほど交通需要も多く道路の交通容量が一定であれば渋滞が起こる可能性も高いと考える。問題を単純化するための前提として、1. 道路の車線数、交通容量は等しい。2. 道路である枝は無向枝である（一方通行・通行止めは考えない）。3. 頂点（交差点）間の交通需要はすべての組に対して一様とし、他地域からの流入は考えない。

4 $SPCP$とネットワークの連結安定性

ネットワーク構造を有するシステムはわれわれの周囲に数多くみられる。道路網からなる道路ネットワーク、電力の送配電網からなる電力ネットワーク、都市ガスの供給網からなる都市ガスネットワーク、水道供給網からなる水道ネットワーク、等々、われわれの日常生活の周囲にも非常に数多くのネットワーク構造を有するシステムが存在する。最短経路数え上げ法を適用することによって、これらのネットワーク構造を有するシステムの連結安定性の定量的評価が可能であることを示す。

頂点集合をV、枝集合をEとするネットワークシステム$N=(V,E)$において、頂点の個数、枝の本数をそれぞれ$|V|=n$, $|E|=m$とする。ここでネットワーク$N=(V,E)$の枝はすべて無向枝とする。このとき、ネットワーク$N=(V,E)$のm本の枝のうちk本を除去した場合に得られるネットワークにおいて、異なる2つの頂点を結ぶ経路の本数を$C_m(k)$と表し、$C_m(k)$の$C_m(0)$に対する割合を$S_m(k)$と表す。すなわち$K=\{1,2,\cdots,m\}$に対して

$$S_m(k)=\frac{C_m(k)}{C_m(0)} \qquad k\in K$$

とする。枝を全く除去しない場合の異なる2つの頂点を結ぶ経路の本数は$\frac{n(n-1)}{2}$であるので、$C_m(0)=\frac{n(n-1)}{2}$となる。したがって

$$0\le S_m(k)=\frac{2C_m(k)}{n(n-1)}\le 1,\ k\in K$$

注意すべきことは、一般に$S_m(k)$の値は1通りではない、すなわち関数$S_m^N=S_m(k)$は1価関数ではないということである。ネットワーク$N=(V,E)$のm本の枝のうちk本を除去する場合、除去の仕方によって得られる$S_m(k)$の値が異なるということである。

$N=(V,E)$に対する関数S_m^Nが上側安定連結とは、すべてのkに対して$S_m(k)\ge 1-\frac{k}{m}$、また下側安定連結性とは、すべてのkに対して$S_m(k)\le 1-\frac{k}{m}$であると定義する。

定理 P_3, W_3は下側安定連結、C_3は上側安定連結である。

定理 P_m, W_mは下側安定連結、C_mは上側安定連結である。

枝の本数がmのネットワーク$N=(V,E)$と$N'=(V',E')$に対する関数$S_m(k)$と$S'_m(k)$が与えられたとき、任意の$t\in S_m(k)$に対して$t'\le t$, $t'\in S'_m(k)$が存在するとき

$$S_m(k)\succeq S'_m(k)$$

と書く。さらに次の関係が成立するとき

$$S_m(N)\succeq S'_m(N') \qquad k\in K=\{1,2,\cdots,m\}$$

ネットワーク$N=(V,E)$は$N'=(V',E')$より上位安定連結という。

定理 $S_3(C_3)\succeq S_3(W_3)\succeq S_3(P_3)$

定理 $S_m(C_m)\succeq S_m(W_m)\succeq S_m(P_m)$

5 まとめ

本稿では、最短経路数え上げ問題と道路交通政策に関する問題、ネットワーク構造を有するシステムの連結安定性の問題との関連について、これまでに得られた結果の一部のみを紹介した。最短経路数え上げ問題については、特にネットワークシステムの安定性の問題等についてさらなる研究成果が期待される。