

リコールの可否が一定期間制御できる最適停止問題

02202090 筑波大学 齋藤毅 SAITO Tsuyoshi

1. はじめに

本研究では、各時点に現れるオファーの将来におけるリコールの可否がオファーの価値に応じた金額を払うことで一定期間制御できる、という最適停止問題を考える。以下、家の購入問題を例に問題状況を説明する。

ある人が今日から t 日以内に家を1軒買わなければならないとする。見つけられる家は1日につき1軒だけであり、1軒の家を見つけるためには s 円(探索費用)が必要である。見つかる家の価値は最低で a 、最高で b であり、ある既知の分布 F にしたがうものとする。なお家の価値とは価格や交通の便等を評価した値であり、その単位は探索費用と同じであるとする。

ここで、価値 w の家に対して $r(w)$ 円(予約費用)を払えばこの家を k 日間予約できる、つまり予約した日から k 日以内ならいつでもこの家をリコールできると仮定する。このとき x_i を i 期前に予約したオファーの価値とするとベクトル $\mathbf{x} = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_1)$ は予約がまだ有効な全てのオファーを表すことになる。このベクトルを予約オファー(reserved offers)と呼び、この中で最大価値を持つオファーを \hat{x} で表す。また「現時点で見つけた家」をカレントオファー(current offer)と呼ぶ。

さて家の検分を終えた後、彼は次の4つの決定のいずれかを下さなければならない。

1. その家を買う(AS).
2. その家を予約する(RC).
3. その家は見送り予約した家の一軒を買う(PS).
4. その家は見送り家探しを続ける(PC) (各記号は Accept, Reserve, Pass up, Stop, Continue からつけたものである)。

本研究の目的はこのような問題における最適決定ルールの構造を研究することである。た

だし予約しなかった家や予約の切れた家のリコールはできず、買わなかった家に払った予約費用は返還されないものとする。また予約費用は家の価値の増加関数であるとする。

2. 基本方程式

$v_t(\mathbf{x})$ を「時点 t で予約オファー \mathbf{x} を持つ状態から探索を始め、それ以降を最適決定ルールに従った場合の総期待利益」とする。時点 t は最終時点から後ろ向きに数えたものとする。と、 $t \geq 1$ における $v_t(\mathbf{x})$ は

$$v_t(\mathbf{x}) = \int_a^b \max \left\{ \begin{array}{l} w, \\ -r(w) - s + \beta v_{t-1}(\mathbf{y}, w), \\ \hat{x}, \\ -s + \beta v_{t-1}(\mathbf{y}, 0) \end{array} \right\} dF(w)$$

と表すことができる。ここで括弧内の各式は順に決定 AS, RC, PS, PC をとった場合の総期待利益を表しており、 β は1期間当たりの割引率 ($0 < \beta \leq 1$)、そして \mathbf{y} はベクトル $\mathbf{y} = (x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_1)$ である。最終時点 ($t = 0$) においては探索の継続を前提とした決定 RC と PC をとることはできないので $v_0(\mathbf{x}) = \int_a^b \max\{w, \hat{x}\} dF(w)$ となる。

3. 最適決定ルール

各時点における最適決定ルールは図2,3のようにカレントオファー (w) を縦軸に、予約オファーの1つ (x_i) を横軸にとり、残りの予約オファーは固定することで2次元平面上に表すことができる。これらは $k = 2$ における例であるため図1のような図示もできる。

図2,3より $(x_2, x_1) = (0.2, 0.3)$ のときには、カレントオファー w が $w < 0.405$ ならば決定 PC, $0.405 < w < 0.640$ ならば決定 RC, $0.640 < w$ ならば決定 AS が最適決定となることがわかる。

この例では (x_2, x_1) の組み合わせに関わらず決定 PC と RC の境界は一点だが、これが複数点になることがある (図 4)。このような場合最適決定ルールは MCV (Multi Critical Values) 性を持つと呼ぶ。

4. 結論

- (a) 予約した家の購入 (決定 PS) が最適決定となりうるのはその有効期間の最終日, または探索の最終日に限られる (翌日に持ち越せる家ならば買う必要はない)。予約した家を計画期間の途中で購入して探索を終了することがある。
- (b) x_k を横軸にとった場合以外の最適決定ルールの図は完全に一致する。
- (c) まだ予約期間を十分残している家より評価の劣る家に対しても予約が最適決定となることがある。
- (d) その時々で見つけた家を購入すべきか予約すべきかの判断にそれまで予約した家々の情報は必要ない。(決定 AS と RC との境界は予約オファーに無関係)
- (e) 最適決定ルールが MCV 性を持つか否かは $r(w)$ の形状による (凹関数ならば MCV 性を持たない)。

5. 参考文献

[1] Saito, T. (1998). Optimal Stopping Problem with Controlled Recall, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1988/1

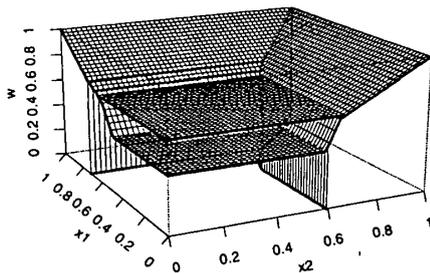


図 1. 最適決定ルール ($k = 2$)

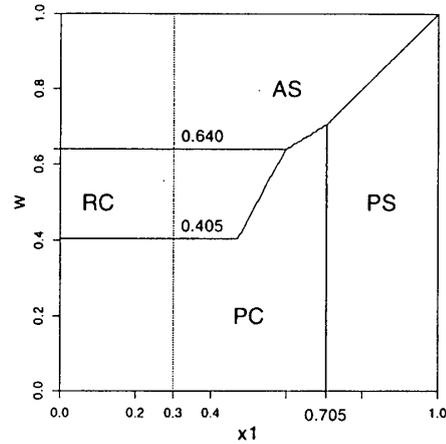


図 2. 最適決定ルール ($x_2 = 0.2$)

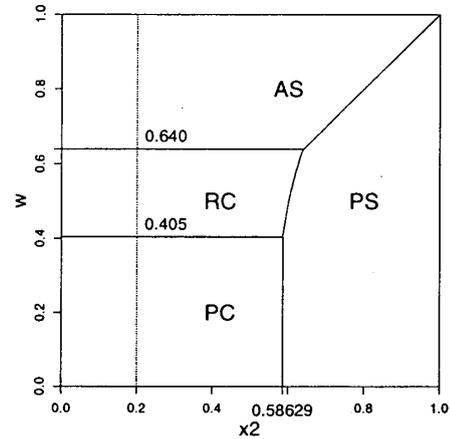


図 3. 最適決定ルール ($x_1 = 0.3$)

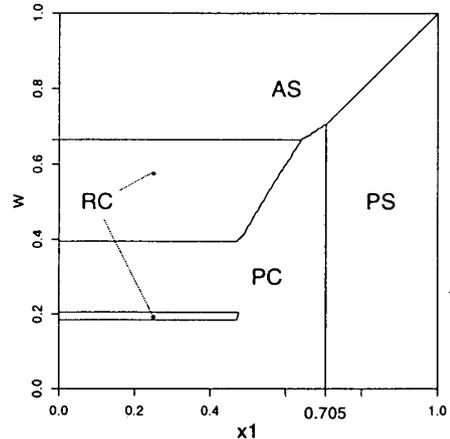


図 4. 最適決定ルール (MCV 性)