1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

一般２レベル計画問題の最適性条件

01008610 上智大学　石塚 陽 ISHIZUKA Yo
上智大学 * 井部己文 IBE Komon

1　はじめに

Stackelberg 問題に代表されるような、ある最適化問題（下位問題）のパラメトリック最適解を目的関数や制約条件に含むような最適化問題の局所解の最適性条件について考える。従来、この種の問題の最適性条件としては、非線形計画問題に対する感度解析の結果を利用し、下位問題のパラメトリック最適解の上位のパラメータに関する「方向微係数」の表現を得て、それを用いて１次の最適性必要条件および十分条件を誘導したもの [1]、あるいは下位問題の最適値関数を用い、２レベル問題を見かけ上、微分不可能等式制約条件つき非線形計画問題に変換し、一般勾配による KKT 条件を適用したものなどが提案されている。

本報告では、２レベル計画問題を、集合値関数を制約式に含む一般的な最適化問題としてとらえ、その１次及び２次の最適性条件の誘導を試みる。これを通じて２レベル計画問題の１次及び２次の最適性条件の誘導、さらには感度解析のために必要な枠組みを明らかにすることを目標としている。

2　定式化

一般に２レベル計画問題（Bilevel Programming Problem） [2] は次のように定式化される。

$$(1)\begin{cases} \min\limits_{x} \inf\limits_{y^*\in Y^*(x)} F(x,y^*) \\ \text{s.t} \quad Y^*(x)=\arg\min\limits_{y} f(x,y) \\ \qquad\qquad\qquad \text{s.t} \quad (x,y)\in C \end{cases}$$

ここで、$x\in\Re^n$, $y\in\Re^m$, $F:\Re^n\times\Re^m\to\Re^1$, $f:\Re^n\times\Re^m\to\Re^1$, $C\subset\Re^n\times\Re^m$ とし、$Y^*(x)$ は x が与えられた下での下位問題の最適解集合である。簡単のために、ここでは上位の制約条件はないものとしている。（BLPP）は、下位問題の最適解集合 $Y^*(x)$ を一般集合 $S(x)$ で置き換えれば、以下のような集合値関数を制約式にもつ最適化問題となる。

$$(2)\begin{cases} \min\limits_{x,y} \ F(x,y) \\ \text{s.t}\ y\in S(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min\limits_{x,y} \ F(x,y) \\ \text{s.t}\ (x,y)\in graphS \end{cases}$$

ただし $graphS=\{(x,y)\in\Re^n\times\Re^m \mid y\in S(x)\}$ は $S:\Re^n\to 2^{\Re^m}$ のグラフを表し、$F:\Re^n\times\Re^m\to\Re^1$ は２階連続微分可能とする。

Definition 1
集合値関数 $S:\Re^n\to 2^{\Re^m}$ の点 $(\bar{x},\bar{y})$ （但し、$\bar{y}\in S(\bar{x})$）における、contingent deivative $S'_{\bar{x},\bar{y}}:\Re^n\to 2^{\Re^m}$ 及び $(u,v)\in\Re^n\times\Re^m$, $\xi\in\Re^n$ 方向への２次の contingent derivative $S''_{\bar{x},\bar{y}}:\Re^n\times\Re^m\times\Re^n\to 2^{\Re^m}$ を以下で定義する。 [3]

$z\in S'_{\bar{x},\bar{y}}(d)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{以下を満たす数列}t_k\to 0^+\text{と点列}d^k\to d, \\ z^k\to z\text{が存在する。} \\ z^k\in\dfrac{S(\bar{x}+t_kd^k)-\bar{y}}{t_k} \end{cases}$$

$\zeta\in S''_{\bar{x},\bar{y}}((u,v);\xi)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \text{以下を満たす数列}t_k\to 0^+\text{と点列}(\xi^k,\zeta^k)\to \\ (\xi,\zeta)\text{が存在する。} \\ \bar{y}+t_kv+t_k^2\zeta^k/2\in S(\bar{x}+t_ku+t_k^2\xi^k/2) \end{cases}$$

Definition 2[3]

1. $S \subset \Re^n, x \in S$ とし集合 S の x における v 方向への *contingent set* $K(S,x)$ 及び *adjacent set* $T(S,x)$ を以下のように定義する。

   $K(S,x) \equiv \{y \mid \forall\delta > 0\ \exists t \in (0,\delta)\ \exists w \in B(y,\delta) \text{such that } x + tw \in S\}$

   $T(S,x) \equiv \{y \mid \forall\delta > 0\ \exists\lambda > 0 \text{ such that } \forall t \in (0,\lambda)\ \exists w \in B(y,\delta) \text{ with } x + tw \in S\}$

   ただし $B(y,\varepsilon) \equiv \{v \in \Re^n : \|v - y\| \le \varepsilon\}$

2. $S \subset \Re^n, x \in S, v \in \Re^n$ とし集合 S の x における v 方向への *second-order contingent set* $K_2(S,x,v)$ 及び *second-order adjacent set* $T_2(S,x,v)$ を以下のように定義する。

   $K_2(S,x,v) \equiv \{y \mid \forall\delta > 0\ \exists t \in (0,\delta)\ \exists w \in B(y,\delta) \text{such that } x + tv + t^2w/2 \in S\}$

   $T_2(S,x,v) \equiv \{y \mid \forall\delta > 0\ \exists\lambda > 0 \text{ such that } \forall t \in (0,\lambda)\ \exists w \in B(y,\delta) \text{ with } x + tv + t^2w/2 \in S\}$

ここで以下が成立することに注意する。
$K(graphS, (\bar{x},\bar{y})) = graphS'_{\bar{x},\bar{y}}$
$K_2(graphS, (\bar{x},\bar{y}), (u,v)) = graphS''_{\bar{x},\bar{y}}((u,v);\bullet)$

3 一般化した問題（GOP）に対する最適性条件

Proposition 1 （線形化定理）
(x^*,y^*) が（2）の最適解ならば以下を満たす $z \in \Re^m$　$d \in \Re^n$ は存在しない。

$$\nabla_x F(x^*,y^*)d + \nabla_y F(x^*,y^*)z < 0$$
$$(d,z) \in co\ graphS'_{x^*,y^*}$$

ただし、co は凸包を表す。

Theorem 1(一般化KKT)
(x^*,y^*) が（GOP）の最適解ならば、

$$\nabla F(x^*,y^*) \in (co\ graphS'_{x^*,y^*})^+$$

ただし $K^+ \equiv \{u \mid \langle u,d\rangle \ge 0 \quad \forall d \in K\}$ は K の正極錘を表す。

Regularity Condition

$$\begin{cases} K(graphS, (x^*,y^*)) = T(graphS, (x^*,y^*)) \\ K_2(graphS, (x^*,y^*), (u,v)) \\ \quad = T_2(graphS, (x^*,y^*)) \quad \forall(u,v) \end{cases}$$

Theorem 2
Regularity Condition 成立の下で (x^*,y^*) が（2）の最適解ならば、

$$\nabla F(x^*,y^*)(p,q)^T$$
$$+(u^T,v^T)\nabla^2 F(x^*,y^*)(u,v) \ge 0$$
$$\forall(p,q) \in graphS''_{x^*,y^*}((u,v);\bullet)$$
$$\forall(u,v) \in graphS'_{x^*,y^*}(\xi) \text{and} \nabla F(x^*,y^*)(u,v) = 0$$

Theorem 3
Regularity Condition 成立の下で以下が満たされていれば (x^*,y^*) は（2）の2次の強意局所最適解である。

$$\begin{cases} (u^T,v^T)\nabla^2 F(x^*,y^*)(u,v) > 0 \text{ with} \\ \nabla F(x^*,y^*)(u,v)^T = 0 \\ \forall(u,v)^T \in graphS'_{x^*,y^*}(\xi) \setminus \{0\} \end{cases}$$

4 結論

ここでは、制約集合値関数の1次及び2次の contingent derivative が本質的な役割を演ずることが分ったが、2レベル計画問題の場合、解の最適解集合の contingent derivative の表現を売ることが今後の課題となる。

参考文献

[1] S.Dempe, *A Necessary and Sufficient Optimality Condition for Bilevel Programming Problems*, Optimization, 25, (1992), pp.341-354.

[2] K.Shimizu, Y.Ishizuka, J.F.Bard, *Nondifferentiable and Two-Level Mathematical Programming*, Kluwer Academic Publishers, (1997).

[3] D.Ward, *A Comparsion of Second-Order Epiderivatives:Calculas and Optimality Conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 193, (1995), pp.465-482.