1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

拡張半正定値線形相補性問題と最適化アプローチ

京都大学　柴田 雅博　SHIBATA Masahiro
*山下 信雄　YAMASHITA Nobuo
福島 雅夫　FUKUSHIMA Masao

1　序論

線形相補性問題 (LCP) や非線形相補性問題 (NCP) は, 最適化問題や各種均衡問題など幅広い応用があり, オペレーションズ・リサーチの分野における重要な問題の1つである [2]. その LCP や NCP に対して, 数々の拡張された問題が提案されており, それらの拡張された問題に対して, 問題の性質や解法が広く研究されている. このような拡張の流れは大きく 2 つある. 一つは, 相補性問題を与える関数を一般化するものであり, そのような問題として拡張線形相補性問題 (XLCP) がある [1]. XLCP は, LCP を含むだけではなく, 様々な応用があることが報告されている [1]. もう一つの拡張の流れは, 扱う空間を R^n のベクトル空間から対称行列の空間に拡張する流れである. そのように拡張された問題として半正定値相補性問題 (SDCP) がある. この SDCP は, 本来, 組合せ問題や制御の分野で活発に研究されている半正定値計画問題 (SDP) の最適性条件にも関連する問題である.

本発表では, この 2 つの拡張の流れを 1 つにした次のように定式化される拡張半正定値線形相補性問題 (XSDLCP) を考察する.

Find $(x,y) \in \mathcal{S}^m \times \mathcal{S}^m$ such that

$$Mx - Ny \in C,\ x \in \mathcal{K}^m,\ y \in \mathcal{K}^m, \langle x, y\rangle = 0$$

ここで, $\mathcal{S}^l$ は $l \times l$ の実対称行列の線形空間を表し, $M : \mathcal{S}^m \to \mathcal{S}^n$ と $N : \mathcal{S}^m \to \mathcal{S}^n$ は線形写像, $\mathcal{K}^l \subset \mathcal{S}^l$ は, $l \times l$ の半正定値対称行列の凸錘集合を表す. また, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, $\langle x, y \rangle := \mathrm{tr}[xy]$ で定義される $\mathcal{S}^m$ 上のノルムである. さらに, 集合 C は線形写像 $A : \mathcal{S}^m \to \mathcal{S}^k$ と対称行列 $b \in \mathcal{S}^k$ を用いて $C = \{u \in \mathcal{S}^n | Au - b \in \mathcal{K}^k\}$ と表されるものとする. 本発表では, 集合 $\{(x,y) | Mx - Ny \in C, x \in \mathcal{K}^m, y \in \mathcal{K}^m\}$ は空でないと仮定する.

上記で定義された XSDLCP は, SDCP や XLCP の自然な拡張と考えることができるので, XSDLCP を解く解法として, XLCP や SDCP に対して考案された手法 [3, 5] が拡張できると期待される. 本発表では, 特に, XSDLCP を等価な制約なし最適化問題に変換して解く方法を考える.

2　拡張半正定値相補性問題

この節では, 序論で提案した XSDLCP が実際に SDP や XLCP の拡張になっていることを指摘する.

SDP⇒XSDCP:

SDP は $a_0, a_i \in \mathcal{S}^n, b_i \in R$ に対して, 次のように定式化された問題である.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \langle a_0, x \rangle \\ \text{subject to} & \langle a_i, x \rangle = b_i\ (i = 1, \cdots, m), \\ & x \in \mathcal{K}^n. \end{array}$$

この問題に対する, KKT 条件は次のように与えられる.

$$x \in \mathcal{K}^n,\ y \in \mathcal{K}^n,\ \langle x, y \rangle = 0,$$

$$y = a_0 + \sum \lambda_i a_i,\ \langle a_i, x \rangle = b_i\ \ (i = 1, \cdots, m).$$

ここで, $y \in \mathcal{S}^n$ と $\lambda \in R^m$ はラグランジュ乗数である. この KKT 条件を満す (x, y, λ) を求める問題は XSDLCP である.

XLCP⇒XSDCP:

XLCP は次の条件をみたす $(x,y) \in R^{2m}$ を求める問題である.

$$Mx + Ny \in C, x \geq 0, y \geq 0, \langle x, y \rangle = 0$$

ここで, M, N は $n \times m$ の行列であり, C は多面体集合を表し, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, ユークリッド空間上のノルムを表す. この問題は, 対称行列の線形空間を対角行列の空間に制限した XSDLCP とみなすことができる.

3　最適化アプローチ

この節では, XSDLCP を等価な最適化問題に再定式化することができるメリット関数を提案し, その関数の性質を示す.

まず, 次の性質を持つ関数 $\psi : \mathcal{S}^m \times \mathcal{S}^m \to R$ を考える.

$$\psi(x,y) \geq 0,\ \forall (x,y) \in \mathcal{S}^m \times \mathcal{S}^m$$

かつ

$$\psi(x,y) = 0 \Leftrightarrow\ x \in \mathcal{K}^m,\ y \in \mathcal{K}^m,\ \langle x, y \rangle = 0.$$

Tseng [4] は, このような性質を持つ関数をいくつか提案している. さらに

$$p(x,y)\begin{cases} =0 & \text{if } Mx-Ny\in C \\ >0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

を満す関数 $p:\mathcal{S}^m\times\mathcal{S}^m\to R$ を用いて関数 $f:\mathcal{S}^m\times\mathcal{S}^m\to R$を次のように定義する.

$$f(x,y):=p(x,y)+\psi(x,y).$$

この関数は XSDLCP のメリット関数となり, 次の制約なし最適化問題は XSDLCP と等価になる.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x,y) \\ \text{subject to} & (x,y)\in\mathcal{S}^m\times\mathcal{S}^m \end{array}$$

本発表では, ψとして NCP に対する 2 乗 Fischer-Burmeister 関数を拡張した次の関数を考える.

$$\psi(x,y):=\|(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-x-y\|^2.$$

ここで, $\|\cdot\|$ は, $\|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ で定義されるノルムである. さらに, 関数pとして,

$$p(x,y):=\|[-AMx+ANy+b]_+\|^2$$

を考える. ここで, $[x]_+$は, x の$\mathcal{K}^k$への直交射影である. そのときメリット関数 f は次のように表される.

$$f(x,y)=\|(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-x-y\|^2+\|[-AMx+ANy+b]_+\|^2,$$

この関数に対して次の定理が成り立つ.

定理 3.1 関数 fは $\mathcal{S}^m\times\mathcal{S}^m$上で非負である. さらに, $f(x,y)=0$ かつ $(x,y)\in\mathcal{S}^m\times\mathcal{S}^m$であることと (x,y)が *XSDLCP* の解であることは等価である. □

この定理により, fを用いた最小化問題が XSLCP と等価になることがわかる. しかしながら, fは一般に凸関数ではない. そのため, fの停留点が XSDLCP の解となる条件を調べることは重要である.

その条件を示す前にいくつかの定義を与える. まず, 線形写像 $A:\mathcal{S}^n\to\mathcal{S}^k$に対して, A^*は A の随伴作用素とする. さらに, Cの recession cone を 0^+Cで表し, 0^+Cの極錐を $(0^+C)^*$であらわす.

また, 次の補題は, fの停留点が XSDLCP の解となる条件を与える際, 重要な役割を果たす.

補題 3.1 次の性質が成り立つ.
(a) 任意の $z\in\mathcal{S}^k$ に対して, $\|[z]_+\|^2$は $\mathcal{S}^k$上で凸である.
(b) 任意の $z\in\mathcal{S}^k$ に対して, $\|[z]_+\|^2$は $\mathcal{S}^k$上で微分可能である. □

この補題を用いて定理を示すことができる.

定理 3.2 次の条件のうち少なくとも *1* つは満されているとする.
(i) 線形写像 MN^*は $(0^+C)^*$上で *copositive* である.
(ii) $-b\in\mathcal{K}^k$が成り立つ.
そのとき, fの停留点は *XSDLCP* の解である. □

4 今後の課題

今後の課題としては以下のものが考えられる.

- 等価な最小化問題を解く効率のよいアルゴリズムの開発.
- XSDLCP の性質の解析.

参考文献

[1] O.L. Mangasarian and J.-S. Pang, "The extended linear complementarity problem," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 16:359-368, 1995.

[2] J.-S. Pang, Complementarity problems, *Handbook of Global Optimization*, Edited by R. Horst and P. Pardalos, Kluwer Academic Publishers (1994), Boston, Massachusetts.

[3] M.V. Solodov, "Some Optimization Reformulation for the Extended Linear Complementarity Problem," working paper, Instituto de Matemática Pure e Aplicada, Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico, Rio de Janeiro, RJ 22460-320, Brazil.

[4] P. Tseng, "Merit functions for semi-definite complementarity problems", *Mathematical Programming*, to appear.

[5] N. Yamashita and M. Fukushima "A new merit function and a descent method for semidefinite complementarity problem", to appear in Reformulation: *Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods*, M. Fukushima and L, Qi(eds.), Kluwer Academic Publishers B. V.