1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

半正定値計画問題に対する交互方向乗数法

01012143 名古屋市立大学 *茨木 智 IBARAKI Satoru
01502094 京都大学 福島雅夫 FUKUSHIMA Masao

1 はじめに

$n\times n$ 実行列の空間を $R^{n\times n}$ とする．$X,Y\in R^{n\times n}$ に対して，$R^{n\times n}$ 上の内積 $X\cdot Y$ を $X\cdot Y=\mathrm{tr}X^TY$ で，X のノルムを $\|X\|=(X\cdot X)^{\frac{1}{2}}$ で定義する．また，$\mathcal{S}^n\subset R^{n\times n}$ を $n\times n$ 対称行列の空間とする．$X\in\mathcal{S}^n$ に対して，X が半正定値のとき $X\succeq 0$ と表す．行列 X の i 行 j 列を X_{ij} と表す．

ここで，半正定値対称行列を変数に持つ関数 $f:\mathcal{S}^n\to(-\infty,+\infty]$ を考える．関数 f が凸であるとは，任意の $X,Y\in\mathcal{S}^n$ と $\alpha\in[0,1]$ に対して

$$\alpha f(X)+(1-\alpha)f(Y)\geq f(\alpha X+(1-\alpha)Y)$$

が成立することをいう．関数 f のレベル集合 $\{X\in\mathcal{S}^n|f(X)\leq\alpha\}$ があらゆる α に対して閉集合であるとき，f を閉凸関数とよぶ．凸関数 f が，$f(X)>-\infty,\ \forall X\in\mathcal{S}^n$ かつある $X\in\mathcal{S}^n$ に対して $f(X)<+\infty$ のとき，f を真凸関数とよぶ．

$X\in\mathcal{S}^n$ に関する次の半正定値凸計画問題を考える．

$$\begin{array}{ll}\min & f_0(X)\\ \text{s.t.} & A_i\cdot X=b_i,\ i=1,\dots,m,\\ & X\succeq 0\end{array}\tag{1}$$

ただし，関数 $f_0:\mathcal{S}^n\to(-\infty,+\infty]$ は閉真凸関数とし，すべての i に対して，$A_i\in\mathcal{S}^n$ は定数行列，b_i は定数である．もし関数 f_0 が定数行列 $C\in\mathcal{S}^n$ を用いて，

$$f_0(X)=C\cdot X\tag{2}$$

と表されるとき，問題 (1) は半正定値線形計画問題となり，内点法を適用することが試みられている [2].

本報告では，半正定値凸計画問題 (1) に対して，非線形最適化アルゴリズムの 1 つである交互方向乗数法を適用することを提案する．このアルゴリズムは分解法であり，その性質が問題 (1) において効果的に利用できることを示す．

2 交互方向乗数法

問題 (1) と等価な以下の問題を考える．

$$\min f(X)+g(Y)\ \text{ s.t. }\ X=Y.\tag{3}$$

ただし

$$f(X)=\begin{cases}f_0(X) & \text{if } X\succeq 0\\ \infty & \text{otherwise}\end{cases}\tag{4}$$

$$g(Y)=\begin{cases}0 & \text{if } A_i\cdot Y=b_i,\ i=1,\dots,m\\ \infty & \text{otherwise}\end{cases}\tag{5}$$

である．(3) のような形に定式化された問題に対しては，交互方向乗数法 [1] を適用することが可能である．

交互方向乗数法

Step 0 : 初期値 $Y^0,P^0\in\mathcal{S}^n$ および定数 $\lambda>0$ を定める．$k:=0$ とする．

Step 1 : X に関する最小化問題

$$\min\left\{f(X)+P^k\cdot X+\frac{\lambda}{2}\|X-Y^k\|^2\right\}\tag{6}$$

を解き，その解を X^{k+1} とする．

Step 2 : Y に関する最小化問題

$$\min\left\{g(Y)-P^k\cdot Y+\frac{\lambda}{2}\|X^{k+1}-Y\|^2\right\}\tag{7}$$

を解き，その解を Y^{k+1} とする．

Step 3 : P^k を

$$P^{k+1}:=P^k+\frac{1}{\lambda}(X^{k+1}-Y^{k+1})$$

と更新し，$k:=k+1$ として Step 1 に戻る．

交互方向乗数法の各ステップを詳しく見てみよう．(4) より Step 1 の問題 (6) は

$$\begin{array}{ll}\min & f_0(X)+P^k\cdot X+\frac{\lambda}{2}\|X-Y^k\|^2\\ \text{s.t.} & X\succeq 0\end{array}$$

と書ける．特に，関数 f が (2) で与えられる場合は，上の問題は次のように書き換えられる．

$$\begin{array}{ll} \min & (C+P^k)\cdot X + \frac{\lambda}{2}\|X-Y^k\|^2 \\ \text{s.t.} & X \succeq 0. \end{array}$$

このときの解 X^{k+1}は

$$X^{k+1} = [Y^k - \frac{1}{\lambda}(C+P^k)]_+ \tag{8}$$

と表すことができる．ただし、$[\cdot]_+$は集合 $\mathcal{K} = \{X | X \succeq 0\}$ への直交射影である．

一方，Step 2 の問題 (7) は

$$\begin{array}{ll} \min & -P^k\cdot Y + \frac{\lambda}{2}\|X^{k+1}-Y\|^2 \\ \text{s.t.} & A_i\cdot Y = b_i,\ i=1,\ldots,m \end{array}$$

と書ける．この問題は Y に対する 2 次計画問題であるから，その解は，制約 $A_i\cdot Y = b_i$に対するラグランジュ乗数を u_iとすると

$$Y = X^{(k+1)} + \frac{1}{\lambda}(\sum_{i=1}^{m} u_i A_i + P^k) \tag{9}$$

と表される．これを $A_j\cdot Y = b_j$に代入すると，各 $j = 1,\ldots,m$ に対して

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{m}(A_j\cdot A_i)\,u_i = b_j - A_j\cdot(X^{(k+1)} + \frac{1}{\lambda}P^k) \tag{10}$$

となる．したがって、u_iに関する連立方程式 (10) を解いた結果と (9) より、問題 (7) の解を得る。

3 0-1(2 次) 計画問題に対する応用

$w \in R^n$を成分が 0 または 1 のベクトルとして，次の 2 次関数を目的関数とする 0-1 計画問題 [2] を考える．

$$\begin{array}{ll} \min & w^TQw + 2c^Tw \\ \text{s.t.} & w \in \{0,1\}^n. \end{array}$$

ただし，$Q \in \mathcal{S}^n$，$c \in R^n$である．以下では半正定値行列を用いて，この 0-1(2 次) 計画問題の緩和問題を構成し，前節で述べた交互方向乗数法がこの緩和問題に対して，効率よく適用できることを示す．

2 次方程式を用いると，0-1 制約集合は $\{w | w_j(w_j-1)=0, \forall j\}$ と表すことができる．これは凸集合ではないので，この集合を含むような凸集合を考える．新しく変数 $W \in \mathcal{S}^n$を導入すると，

$$\begin{aligned} w_j(w_j-1)=0, &\Leftrightarrow\ {w_j}^2 = w_j \\ &\Leftrightarrow\ W_{jj} = w_j, W_{jj} = {w_j}^2 \end{aligned}$$

であるから，制約 $W_{jj} = {w_j}^2$，$\forall j$ を緩和することによって，次の半正定値線形計画問題を得る．

$$\begin{array}{ll} \min & W\cdot Q + 2c^Tw \\ \text{s.t.} & W_{jj} = w_j,\ \forall j,\ \begin{pmatrix} W & w \\ w^T & 1 \end{pmatrix} \succeq 0. \end{array} \tag{11}$$

ただし，$w^TQw = \sum_i w_i(\sum_j q_{ij}w_j) = \sum_{i,j} w_iw_jq_{ij} = W\cdot Q$ に注意する．

ここで，行列 $X, \tilde{Q} \in \mathcal{S}^{(n+1)}$を

$$X = \begin{pmatrix} W & w \\ w^T & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q & c \\ c^T & 0 \end{pmatrix}$$

とし，関数 f および g を ($Y \in \mathcal{S}^{(n+1)}$)

$$f(X) = \begin{cases} X\cdot\tilde{Q} & \text{if } X \succeq 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g(Y) = \begin{cases} 0 & \text{if } Y_{jj} = Y_{j\ n+1} = Y_{n+1\ j},\ \forall j \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおけば，問題 (11) は問題 (3) と同様の形に書き換えられ，上で述べた交互方向乗数法を適用できる．この場合，Step 1 の X^{k+1}は

$$X^{k+1} = [Y^k - \frac{1}{\lambda}(\tilde{Q}+P^k)]_+$$

となる．次に Step 2 の Y^{k+1}は，$1 \le i,j \le n$ に対して

$$\begin{aligned} Y_{ij}^{k+1} &= X_{ij}^{k+1} + P_{ij}^k/\lambda \quad i \neq j \\ Y_{jj}^{k+1} &= \left(2X_{j\ n+1}^{k+1} + X_{jj}^{k+1} + (2P_{j\ n+1}^k + P_{jj}^k)/\lambda\right)/3 \end{aligned}$$

によって簡単に計算できる．したがって，0-1 計画問題の緩和問題 (11) に対して，交互方向乗数法が効率よく適用できる．

References

[1] D.P. Bertsekas and J.N. Tsitsiklis. *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods.* Prentice Hall, New Jersey, 1989.

[2] 信太 正之．"半正定値線形計画問題入門." 第 8 回 RAMP シンポジウム予稿集, 1996.