1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

非線形相補性問題に対する微分を使わない降下法

京都大学　山田 憲二郎　YAMADA Kenjiro
*山下 信雄　YAMASHITA Nobuo
福島 雅夫　FUKUSHIMA Masao

1　序論

非線形相補性問題 (NCP)[6] は, 次の条件を満たすベクトル $x \in R^n$ を求める問題である.

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad x^T F(x) = 0.$$

ここで $F: R^n \to R^n$は連続微分可能な関数である.

NCP の解法のひとつとして, NCP を等価な制約なし最適化問題変換する手法が注目を集めている [1]. その等価な最適化問題の目的関数をメリット関数と呼ぶ. これまでに, 多くの研究者によってメリット関数は提案されてきた [1]. Mangasarian と Solodov [4] は, 陰ラグランジュ関数を提案し, この関数が, 微分可能なメリット関数になることを示した. しかしながら, この関数を用いた最適化問題の停留点 x が NCP の解となるためには, $\nabla F(x)$ の正定値性の仮定が必要であった [7]. 最近よく研究されているメリット関数に 2 乗 Fischer-Burmeister 関数がある [2]. この関数も微分可能なメリット関数である. さらに, この関数は, 停留点 x において $\nabla F(x)$ が半正定値であれば, その点が解になることが知られている [2].

このようなメリット関数を用いて最適化問題を解くアルゴリズムとして, 関数の構造を利用した derivative-free 法 (DF 法) と呼ばれる方法がある. この手法は, F のヤコビアンを使わないため, Fのヤコビアンを求めるのが困難な問題や大規模な問題には有効であると考えられている. 山下と福島 [7] は, 陰ラグランジュ関数にを用いた DF 法を提案し, Fが強単調関数のとき, NCP の解に大域的収束することを示した. 一方, Jiang [3] は, 2 乗 Fischer-Burmeister 関数に対する DF 法を提案し, Fが単調関数のとき, NCP の解に大域的収束することを示した. しかしながら, これらの論文では収束率の解析はなされていなかった. つい最近, Mangasarian と Solodov [5] は山下等の手法を修正したアルゴリズムを提案し, F が強単調のとき, 一次収束することを示した. ただし, そのアルゴリズム中の定数は, Fの強単調係数などの未知のパラメータから推定しなければならないという欠点があった.

本発表では, NCP に対する新しいメリット関数を提案し, そのメリット関数を用いた DF 法を提案する. その DF 法が Fが単調関数のとき大域的収束し, さらに, F が強単調であれば, 一次収束することを示す. また, この DF 法は, 未知のパラメータからアルゴリズムの定数を推定する必要がないという長所がある.

2　新しいメリット関数とその性質

本発表では次のメリット関数$\Psi_\alpha : R^n \to R$を提案する.

$$\Psi_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_\alpha(x_i, F_i(x)),$$

ここで, $\phi_\alpha : R^2 \to R$は次式で与えられる関数である.

$$\phi_\alpha(a,b) = \frac{\alpha}{2}(ab)_+^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - a - b)^2,$$

ただし, αは非負のパラメータである. このメリット関数は, $\alpha = 0$ のとき, 2 乗 Fischer-Burmeister 関数に一致する.

この関数Ψ_αは次の性質を持つ.

定理 2.1 (a) Ψ_αは微分可能なメリット関数である.

(b) Fが単調関数であれば, Ψ_αの停留点は *NCP* の解である.

(c) Fが強単調でリプシッツ連続なとき, Ψ_αは *NCP* に対するエラーバウンドを与える.

(d) *NCP* が狭義実行可能で Fが単調関数のとき, $\alpha > 0$ ならばΨ_αのすべてのレベルセットは有界となる. □

3　新しい DF 法とその収束性

この節では, 新しい DF 法を提案し, その収束性の証明を行う.

本発表で提案する DF 法は次に定義されるベクトルを探索方向として用いる降下法である.

$$d(\beta) := -\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial b}(x, F(x)) - \beta \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial a}(x, F(x)),$$

ここで, $\beta \in (0,1)$ であり, $\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial a}(x, F(x))$ と $\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial b}(x, F(x))$ は, それぞれ $(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial a}(x_1, F_1(x)), \ldots, \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial a}(x_n, F_n(x)))^T$ と

$(\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial b}(x_1, F_1(x)), \ldots, \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial b}(x_n, F_n(x)))^T$を表している．このベクトルは$F$のヤコビアンを用いていないことに注意する．一般にこのベクトルは関数Ψ_αの降下方向にはならないが，次の補題に示すように，十分小さいβに対して，Ψ_αの降下条件を満している．

補題 3.1 F を単調関数とし，x を NCP の解でない点とする．このとき，次の条件を満す$\bar{\beta}(x) \in (0,1)$ が存在する．すべての$\beta \in [0, \bar{\beta}(x))$ に対して，探索方向 $d(\beta)$ は次の降下条件を満す．

$$\nabla\Psi_\alpha(x)^T d(\beta) < 0. \qquad \Box$$

本発表では次のアルゴリズムを提案する．

アルゴリズム 3.1

ステップ 1: 初期点$x^0 \in R^n$とパラメータ$\sigma \in (0,1), \beta \in (0,1), \gamma \in (0,1)$ を適当に選ぶ．$k := 0$ とする．

ステップ 2: もし終了条件を満していれば終了する．

ステップ 3: $x^{k+1} := x^k + \gamma^{l_k} d^k(\beta^{l_k})$ とする．ここで，

$$d^k(\beta^{l_k}) = -\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial b}(x^k, F(x^k)) - \beta^{l_k}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial a}(x^k, F(x^k))$$

であり，l_kは次の不等式を満す最小の非負の整数 l である．

$$\begin{aligned}&\Psi_\alpha(x^k + \gamma^l d^k(\beta^l)) - \Psi_\alpha(x^k)\\ &\quad \le -\sigma\gamma^{2l}\|\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial a}(x^k, F(x^k)) + \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial b}(x^k, F(x^k))\|^2.\end{aligned}$$

ステップ 3: $k := k+1$ としてステップ *2* へ．

このアルゴリズムの大域的収束性に関する次の定理が成り立つ．

定理 3.1 $\alpha > 0$ とする．また，NCP は狭義実行可能でFは単調関数とする．このとき，アルゴリズム *3.1*は矛盾なく定義され，生成される点列は少なくとも *1* つの集積点をもつ．さらに，その集積点は NCP の解である．$\Box$

次にアルゴリズム 3.1が一次収束することを示す．

定理 3.2 Fは強単調関数であるとする．また，アルゴリズム中のパラメータγとβは，$\gamma < \beta$を満たすものとする．このとき，アルゴリズム *3.1* によって生成される点列 $\{x^k\}$ は NCP の解に *R-1* 次収束し，数列 $\{\Psi_\alpha(x^k)\}$ は *0* に *Q-1* 次収束する．$\Box$

このアルゴリズムが一次収束するためには，アルゴリズム中の定数を$\gamma < \beta$を満たすように選んでやればよい．一方，Mangasarian と Solodov によるアルゴリズムが大域的かつ 1 次収束するためには，アルゴリズムの定数をFの強単調係数などによって決めなければならない．

4 今後の課題

今後の課題として以下のものが考えられる．

- 数値実験を行って実際に提案したアルゴリズムの有効性を確かめる．
- 提案したアルゴリズムを NCP よりも広いクラスの問題である変分不等式問題に対して拡張する．

参考文献

[1] M. Fukushima, Merit functions for variational inequality and complementarity problems, *Nonlinear Optimization and Applications*, Edited by G. Di Pillo and F. Giannessi, Plenum Publishing Corporation (1996), New York, New York, pp. 155-170.

[2] C. Geiger and C. Kanzow, On the resolution of monotone complementarity problems, *Computational Optimization and Application* 5 (1996), pp. 155-173.

[3] H. Jiang, Unconstrained minimization approaches to nonlinear complementarity problems, *Journal of Global Optimization*, to appear.

[4] O. L. Mangasarian and M. V. Solodov, Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization, *Mathematical Programming* 62 (1993), pp. 277-297.

[5] O. L. Mangasarian and M. V. Solodov, A linearly convergent descent method for strongly monotone complementarity problems, working paper, Computer Sciences Department University of Wisconsin, October, 1996.

[6] J.-S. Pang, Complementarity problems, *Handbook of Global Optimization*, Edited by R. Horst and P. Pardalos, Kluwer Academic Publishers (1994), Boston, Massachusetts.

[7] N. Yamashita and M. Fukushima, On stationary points of the implicit Lagrangian for nonlinear complementarity problems, *Journal of Optimization Theory and Applications* 84 (1995), pp. 653-663.