1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

線形相補性問題に対するプレディクタ・コレクタ型非内点法的連続算法の計算機実験

筑波大学 社会工学研究科 堀田 敬介

1 はじめに

以下の通りに定義される標準的な相補性問題を考える. CP: $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=0$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq(0,0)$ を満たす点 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{2n}$ を見つける. ここで, f は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像である. もし f が線形ならば, すなわち, ある与えられた行列 $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ と与えられたベクトル $\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{x})=M\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}$ という形で表されるとき, この問題は線形相補性問題と呼ばれる. またもし f が単調ならば, すなわち, 任意のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^T(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}))\geq 0$ が成り立つならば, この問題は単調な相補性問題と呼ばれる.

さて, この相補性問題を解くために過去にさまざまな重要な解法が提案されてきているが, ここではここ10年間に多くの研究により発展してきた内点法と, 非内点法的連続算法に注目する. 内点法の多くは, LP や QP を含んでいる相補性問題を理論的に多項式時間で解くことができ, その解法は, 問題の最適解へと続くパスを追跡するパス追跡法と見なせる. しかしながら, そのパスが正象限になければならないという制約がある. 一方, 非内点法的連続算法にはそのような制約はなく, 任意の点を初期点としてスタートできるのであるが, その理論的収束性を示すために必要な条件のため, この解法の多くが LP から派生する相補性問題を解くことができないという欠点がある.

これらの点に着目して, [2] において, 実行可能内点を持つ単調相補性問題であれば, 任意の初期点からスタートできる非内点法的連続算法を提案し, 大域的収束性を示した. そこで用いた方法は, 相補性問題に対する Chen-Harker-Kanzow-Smale smooth 関数 $v(u,a,b):=a+b-\sqrt{(a-b)^2+4u}$([3]) に基づいてホモトピーを作成し, パラメータ u を固定した摂動問題の解からなるパス (センターパス) を追跡する方法である. このパスは [2] で一意に存在することが示されている. しかしながら, いくつかの線形相補性問題におけるこの解法の計算機実験において, 初期点の選び方により, 解への収束が非常に遅くなることがわかった. そこで, 各反復ごとにセンターパス方向へのコレクタステップを行うことにより解への収束の安定を図ることにする. 計算機実験においては, 前述の標準的な線形相補性問題を扱う.

2 アルゴリズム

[2] で提案したアフィンスケーリング法を示す. ホモトピーマップを $U(\boldsymbol{z}):=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{y}-f(\boldsymbol{x}))$ で与え, Newton 方向は任意の点 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n_{++}\times\mathbb{R}^{2n}$ で定義される式 $\mathcal{D}U(\boldsymbol{z})\Delta\boldsymbol{z}=-U(\boldsymbol{z})+\beta\psi(\boldsymbol{z})\boldsymbol{w}^0$ の解である. ここで, $\boldsymbol{z}:=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{w}:=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{r})$, $\psi(\boldsymbol{z}):=\frac{\boldsymbol{w}^{0T}U(\boldsymbol{z})}{\|\boldsymbol{w}^0\|}$ である. また, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{z})=(v_1(\boldsymbol{z}),\ldots,v_n(\boldsymbol{z}))^T$, $v_i(\boldsymbol{z}):=(x_i+y_i)-\sqrt{(x_i-y_i)^2+4u_i}$, $(i=1,\ldots,n)$ である.

Step 0 $\boldsymbol{z}^0:=U^{-1}(\boldsymbol{w}^0)$, $\psi^0:=\psi(\boldsymbol{z}^0)$, $\beta\in(0,1)$, $\epsilon:=10^{-6}$, $k:=0$.

Step 1 ${\boldsymbol{w}^0}^T U(\boldsymbol{z}^k)<\epsilon$ なら終了. そうでなければ, $\boldsymbol{z}:=\boldsymbol{z}^k$, $\psi:=\psi^k$ とし Step2 へ.

Step 2 Newton 方程式を解き $\Delta\boldsymbol{z}$ を計算. 直線探索によりステップサイズを決定.

Step 3 $k:=k+1$ とし Step 1 へ.

ここで提案するプレディクタ・コレクタ法は **Step 2** を以下のように変更する.

Step 2'-1(プレディクタ) $\beta\cong 0$ として Newton 方程式を計算. 直線探索でステップサイズ決定.

Step 2'-2(コレクタ) $\beta\cong 1$ として Newton 方程式を計算. 直線探索でステップサイズ決定.

3 計算機実験

実験結果例を2つ示す．この2つの例は，線形相補性問題の写像 f を決める行列 M が，シンプレックス法で解くと指数回反復がかかる特殊な行列である ([1],[4])．本研究においては，コレクタステップを導入することにより解への収束の安定性と点列の挙動について調べた．ここでは2つの近傍 (表中の Cone1:Short Step, Cone2:Long Step) を用いた結果を示す．また，収束性は理論的に保証されないが，直線探索を行なわずステップサイズ1で進んだ場合 (表中の S-Size1) についての結果もあわせて載せる．表の上2つがアフィンスケーリング法によるもの，下3つがプレディクタ・コレクタ法によるものである．3つの初期点から始めた結果を示してある．上段が反復回数，下段が CPU Time である．

表 1: **Murty's Problem, n=100**

$[\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$	$[1,0,0]$	$[1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$	$[1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]$
Cone1	6 1.838	Case1	8 2.408
Cone2	6 1.767	Case1	8 2.332
Cone1	6 1.717	205 68.960	8 2.383
Cone2	11 3.050	93 27.293	15 3.999
S-Size1	6 1.605	8 2.171	8 2.071

表中で Case1 は，時間及び反復がかかり過ぎるので途中で打ち切ったもの，Case2 は $\boldsymbol{w}^{0T}U(\boldsymbol{z}^k) < 10^{-3}$ 以降なかなか下がらないものを示す．

収束が遅いもののいくつかについては，コレクタステップでセンターパスによせてやることで解けるものが出てきた．いくつかの例において，点列の挙動が改善されていることが分かる．また興味深いことに，理論的に収束が保証されず，それ故に問題によっては解けないことが確かめられてるステップサイズ1でかなり早くとけることが分かる．この解法のさらなる改善と，点列の挙動の詳しい調査についても報告する予定である．

表 2: **Fathi's Problem, n=100**

$[\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0]$	$[1,0,0]$	$[1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$	$[1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]$
Cone1	6 1.999	Case1	Case1
Cone2	6 1.888	Case1	11 3.160
Cone1	6 1.777	Case1	Case2
Cone2	11 3.081	Case1	21 5.775
S-Size1	6 1.555	106 23.039	11 2.999

参考文献

[1] Y.Fathi, *"Computational Complexity of LCPs Associated with Positive Definite Matrices," Mathematical Programming,* **17***(1979), pp.335-344.*

[2] K.Hotta and A.Yoshise, *"Global Convergence of a Class of Non-Interior-Point Algorithms Using Chen-Harker-Kanzow Functions for Nonliner Complementarity Problems," Discussion Paper Series No.708, Institute of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba, Tsukuba, Ibaraki 305, Japan. 1996.*

[3] C.Kanzow, *"Some Noninterior Continuation Methods for Linear Complementarity Problems," SIAM J.Matrix Anal. Appl. Vol.***17***, No.4, pp.851-868, October 1996.*

[4] K.G.Murty, *"Computational Complexity of Complementary Pivot Methods," Mathematical Programming Study,* **7***(1978), pp.61-73.*