1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

巡回セールスマン問題に対するλ-optの確率的多項式性

奈良先端科学技術大学院大学　*岡田 正浩　OKADA Masahiro
奈良先端科学技術大学院大学　田地 宏一　TAJI Kouichi

1　はじめに

組合せ最適化の有名な問題の一つに, 巡回セールスマン問題 (TSP) がある. これは, 枝に長さの付いた完全グラフが与えられたときに, その長さの和が最小となる Hamilton 閉路 (以下, 巡回路と呼ぶ) を求める問題である.

2-opt, および 2-opt を一般化した λ-opt は, おもに対称な TSP に対する局所探索法の一種であり, ある巡回路から λ 本の枝を入れ替えてつくられる新たな巡回路の集合を近傍とする局所探索法である. 2-opt は, 経験的には多項式程度の反復回数で終了することが計算機実験などから知られている. しかしその一方で, 2-opt が指数回数の反復を要する問題例が存在することが知られている. また, 確率的な議論により以下のようなことが示されている.

定理 1.1 [1] d 次元単位格子内に n 個の節点が一様に分布し, 節点間の距離が L_1 ノルムで定義されている問題において 2-opt の反復回数の期待値は $O(n^6 \log n)$ である. □

定理 1.2 [2] 2 次元単位平面上に n 個の節点が一様に分布し, 節点間の距離がユークリッド距離で定義される問題において 2-opt が $O(n^{16})$ 以上の反復回数を要するのは高々 c/n の確率である. ここで c は定数. □

本論文では, この定理 1.1, 1.2 の結果を拡張し, より一般の場合の証明を行なう.

2　確率的多項式性

まず, 節点数が n で枝の長さがそれぞれ適当な確率分布にしたがって定まるような完全無向グラフ上での TSP を考える. このグラフ上で λ-opt を行う. 以下では, それぞれの反復で巡回路の長さが短くなるような枝の入れ替えだけを許し, 巡回路の長さが変化しないような枝の入れ替えは行なわないものとする. まず, 以下の仮定をする.

仮定 2.1 グラフの中の枝 e の長さを X_e とすると, すべての枝に対し,

$$L_{min} \le X_e \le L_{max}$$

となるような定数 L_{min}, L_{max}が存在する. □

それぞれの巡回路は n 本の枝から構成されるので, 巡回路の長さは nL_{min} と nL_{max} のあいだの長さとなる. λ-opt の一度の反復では巡回路から λ 本の枝を取り去り, 別の λ 本の枝を使って再構成する. 巡回路の長さは, nL_{min} と nL_{max} のあいだの長さにあるので, 一回の反復で少なくとも l だけ長さが短くなるならば, 反復回数は

$$\frac{nL}{l} \tag{1}$$

以下となる. ここで,

$$L \;=\; L_{max} - L_{min}$$

である. つまり, l が大きければ反復回数は小さくなる. そこで, λ-opt の一回の反復で巡回路がどの程度短くなるかを考えることにする. 一回の反復で短くなる長さは, 巡回路から取り除かれる λ 本の枝の長さの合計と巡回路を再構成するために使われる λ 本の枝の長さの合計との差である. 与えられたグラフに対して λ-opt の反復で巡回路の枝の入れ替えに使われる可能性のあるこの合計 2λ 本の枝の組合せに対し, 番号付けを行ない区別することにする. その k 番目の組合わせを使って, λ-opt の反復を行なうときに巡回路が短くなる長さを確率変数 $Z_{\lambda,k}$ で表し

$$Z \;=\; \min_k Z_{\lambda,k}$$

とおく. このとき, 例えば $0 < Z \le l$ となる確率が $\frac{1}{n}$ より小さくなれば, (1) より λ-opt の反復回数は確率 $1 - \frac{1}{n}$ 以上で, 高々 $\frac{nL}{l}$ 回となることが示される. そこで, この $Z_{\lambda,k}$ に対して以下の仮定をする.

仮定 2.2 n に依存しない定数 $M_\lambda > 0$, $a_\lambda > 0$ が存在し,

$$P\{0 < Z_{\lambda,k} \le t\} \;\le\; M_\lambda t^{a_\lambda} \text{ (for all } k, t > 0)$$

をみたすものとする. □

この仮定の下で, 以下のような λ-opt に対する, 確率的多項式性を証明することができる.

定理 2.1 仮定 2.1, 2.2 をみたすような問題の群では, 確率 $1-\frac{1}{n}$ 以上でλ-opt の反復回数は高々 $Ln(M_\lambda n^{2\lambda+1})^{1/a_\lambda}$ である. □

とくに, 仮定 2.2 が $a_\lambda=1$ でみたされる場合には, 反復回数の期待値に対して以下のことを示すことができる.

定理 2.2 問題の群が仮定 2.1 をみたし, また $a_\lambda=1$ で仮定 2.2 をみたすとき, λ-opt の反復回数の期待値は $2LM_\lambda n^{2\lambda+2}\log_2 n$ 以下となる. □

これらの仮定 2.1, 2.2 は次節で示すように, 応用上重要ないくつかの問題のクラスでみたされる.

3 実際の問題例

この節では, ランダム TSP や, 節点間の距離が L_1 ノルムで定義された問題に対する λ-opt, また, ランダムユークリッド TSP に対する 2-opt が仮定 2.1, 2.2 をみたすことを示す. したがって, これらの問題例に対しては λ-opt の反復回数が確率的に多項式であることが示される.

3.1 ランダムグラフ上での TSP

まず, 枝の長さが, 枝ごとに独立にある確率分布に従って定まるような TSP に対し, 以下が成り立つ.

定理 3.1 枝の長さが, 枝ごとに独立に確率密度関数 $g(t)$ によって定まる問題を考える. 仮定 2.1 がみたされており, ある定数 U によって

$$g(t) \quad \leq \quad U \text{ (for all } t)$$

となっているものとすると, この問題の群は $M_\lambda = L^{2\lambda-1}U^{2\lambda}, a_\lambda = 1$ として仮定 2.2をみたす. したがって, 確率 $1-\frac{1}{n}$ 以上で, λ-opt の反復回数は高々 $(LU)^{2\lambda}n^{2\lambda+2}$ である. また, 反復回数の期待値は $2(LU)^{2\lambda}n^{2\lambda+2}\log_2 n$ 以下となる. □

3.2 節点間の距離が L_1 ノルムで定義された問題

節点が, d 次元単位格子内に一様に独立に分布し, 枝の長さは, 節点間の L_1 ノルムで定義される問題に対し, 以下が成り立つ.

定理 3.2 n 個の節点が d 次元単位格子内に節点が一様に分布し, 節点間の距離が L_1 ノルムで定義される問題は仮定 2.1を $L=2$, 仮定 2.2 を $a_\lambda=1$, $M_\lambda=\frac{1}{2}$ でみたす. したがって, 確率 $1-\frac{1}{n}$ 以上で反復回数は高々 $n^{2\lambda+2}$ である. また, 反復回数の期待値は $2n^{2\lambda+2}\log_2 n$ 以下である. □

3.3 ランダムユークリッド TSP の場合

ここでは, d 次元における 2-opt での結果のみ示す. 2 次元の場合には以下の定理が成り立つ.

定理 3.3 2 次元単位平面上に節点が一様に分布し, 節点間の距離がユークリッド距離で定義される問題において 2-opt は仮定 2.1 を $L=\sqrt{2}$, 仮定 2.2 を $a_\lambda=\frac{1}{2}$, $M_2=2\sqrt{2}\pi K_1$ でみたす. したがって, 確率 $1-\frac{1}{n}$ 以上で 2-opt の反復回数は高々$8\pi^2K_1^2n^{11}$ である. ここで, K_1 はある定数. □

3 次元以上の場合には以下の定理が成り立つ.

定理 3.4 $d(d\geq 3)$ 次元単位格子内に節点が一様に分布し, 節点間の距離がユークリッド距離で定義される問題において 2-opt は仮定 2.1を $L=\sqrt{d}$, 仮定 2.2 を $a_\lambda=1$, $M_2=3K_2c_{d-1}c_d2^dd^{d-\frac{1}{2}}$ でみたす. したがって, 確率 $1-\frac{1}{n}$ 以上で 2-opt の反復回数は高々 $3K_2c_{d-1}c_d2^dd^dn^6$ である. また, 反復回数の期待値は $6K_2c_{d-1}c_d2^dd^dn^6\log_2 n$ 以下である. ここで, K_2 はある定数, c_dは d 次元単位球の体積を表す. □

参考文献

[1] Chandra, B., Karloff, H. and Tovey, C.: New results on the old k-opt algorithm for the TSP. *Proceedings of the 5th Annual ACM SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, (1994), 150–159.

[2] Kern, W.: A probabilistic analysis of the switching algorithm for the Euclidean TSP. *Mathematical Programming*, Vol. 44 (1989), 213–219.