1－P－17

1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

大規模AHPのモデルとウエイトの算出

01202782　静岡大学　関谷和之　Kazuyuki SEKITANI
01702180　静岡大学　八巻直一　Naokazu YAMAKI

1　はじめに

階層的分析法AHP(Analytic Hierarchy Process) 主観的評価を伴う評価項目間の相対比較，および代替案間の相対比較を定量化する手法として有効であることが知られている．代替案もしくは評価項目の数が多く，かつ評価者が複数であるような意思決定の場面で，適応可能なようにAHPの枠組みの拡張する．

2　大規模AHPのモデル

本節では，大規模AHPでの一対比較値群を適切に表現する形式を論じる．

大規模AHPでの一対比較の評価法は以下の通りである．「各評価者が相対評価できる代替案(代替案)間のみの一対比較を行い，一対比較による相対評価を行わない代替案(代替案)間を許す.」

一対比較値の逆数対称性を仮定する．以降で説明する一対比較値群の表現形式は，各評価項目に対する代替案間の相対評価で記述する．

評価者はL人とし，代替案をn個とする．このとき第l評価者が一対比較した代替案対の集合を$K_l = \{(i,j) \mid$ 代替案 $i < j$ は第l評価者によって相対評価された.$\}$ とする．第l評価者が代替案iに対して代替案jを一対比較した場合、その一対比較値をx^l_{ij}とする．

いずれかの評価者によって一対比較された代替案対の集合Kは$K = \cup_{l=1}^{L} K_l$であり，また，いずれの評価者からも一対比較されなかった代替案対の集合$\bar{K}$は$\bar{K} = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n\} \setminus K$である．本稿では各評価者が一対比較しない代替案間の存在も許すので，$\bar{K} \neq \emptyset$となる場合もありえる．そこで，全代替案間の中で一対比較された代替案対を示すために，代替案iを点iに対応させて，点集合$V = \{1,\ldots,n\}$と有向な並列枝の集合Eから構成されるグラフ$G = (V,E)$を考える．ここで，各枝は各評価者$l = 1,\ldots,L$毎に代替案i,jが$(i,j) \in K_l$であれば，またその時に限り点iから点jへ枝を結ぶこととことで与えられる．このグラフを一対比較グラフGと呼ぶ．通常のAHPでは，単独の評価者により全代替案対に対して重複無く一対比較を行うので，対応する一対比較グラフGは並列枝を含まない完全グラフである．グラフGの同一連結成分内に含まれる点に対応する代替案を同一グループに分類することで，全代替案をグループに分割する．そこで，第1段階では同一グループ内の代替案の重要度を算出し，もし2つ以上の連結成分がグラフGに含まれており，かつ，相異なるグループに含まれる代替案間での重要度が必要であれば，第2段階としてグループ間での評価を行う．このような2段階の評価を提案する．枝で点対が結ばれている関係を示す一対比較グラフGの接続行列を$A \in R^{n\times|E|}$とする．

代替案のある重要度ベクトル$w = (w_1,\ldots,w_n)^T$に対して，各評価者$l = 1,\ldots,L$による一対比較値x^l_{ij}，$(i,j) \in K_l$は$w_i/w_j = x^l_{ij}$である場合が理想的な一対比較値であると考える．つまり，評価された一対比較値x^l_{ij}はある重要度の比w_i/w_jから偶然誤差によって乖離が以下のように生じているものと仮定する．

$$\frac{w_i}{w_j} = x^l_{ij}\epsilon^l_{ij} \tag{1}$$

ここで,ϵ^l_{ij}は誤差項である．

本稿では，正数zを対数変換した値を$\tilde{z} = \log z$とする．また正の要素からなるベクトル$\mathbf{z}$に対して,$\mathbf{z}$の各要素を対数変換して得られるベクトルを$\tilde{\mathbf{z}}$とする.(1)の両辺に対数変換を行うと

$$\tilde{w_i} - \tilde{w_j} = \tilde{x}^l_{ij} + \tilde{\epsilon}^l_{ij} \tag{2}$$

である．一対比較値の逆数対称性の仮定$x^l_{ij} = 1/x^l_{ji}$により(2)は$1 \le i < j \le n$の範囲で考えればよい．

$|E|$次元ベクトルbを接続行列Aの列に割り当てられた枝の並びに沿って$\tilde{x}^l_{ij}$を並べたベクトルとする．各評価者$l = 1,\ldots,L$が代替案対$(i,j) \in K_l$に与えた評価がx^l_{ij}であれば，一対比較グラフGの点iから点jへの枝の容量は$\tilde{x}^l_{ij}$とする．これらの容量$\tilde{x}^l_{ij}$ $(i,j) \in K_l (l = 1,\ldots,L)$を含めた一対比較グラフ$G$を一対比較ネットワーク$\mathcal{N}$と呼ぶ．一対比較ネットワーク$\mathcal{N}$の接続行列$A$とカットベクトル$b$を利用することにより，誤差モデル(2)は以下のように与えることができる．

$$A^T\tilde{w} = b + \epsilon \tag{3}$$

ここで$\tilde{w} = (\tilde{w_1},\ldots,\tilde{w_n})^t$, $\epsilon \in R^{|E|}$は接続行列の列に割り当てられた枝の並びに沿って誤差項$\tilde{\epsilon_{ij}}^l$を並べた誤差ベクトルである．

重要度ベクトルを求めるために，誤差最小化問題(4)を解くことを考える．

$$\min \|A^T\tilde{w} - b\| \tag{4}$$

一対比較グラフGが複数個の連結成分から構成されている場合，問題(4)は連結成分により分割した代替案のグルー

プ毎に分割できる. 連結成分に対応した代替案のグループ毎に問題 (4) を解くことで, 各グループ毎に独立してグループ内の代替案の重要度ベクトル決定が可能となる. そこで, 以降では一対比較グラフ G は連結であると仮定して, 問題 (4) の解き方については第 3 節で提案する.

3 重要度の算出法

$\|\cdot\|$ をユークリッドノルム $\|\cdot\|_2$ とすると, 問題 (4) の最適解 $\tilde{w}$ は正規方程式 $AA^T\tilde{w} = Ab$ の解として得られる. 接続行列 A のランクは $\mathrm{rank}A = n-1$ である. したがって, この正規方程式の解は一意ではない. このとき, 次の補題が成り立つ.

補題 3.1 ([1] の定理 1(P.104)) 任意行列 A に対して $A^TMA^T = A^T, (A^TM)^T = A^TM$ を満足する行列 M が存在し, $\min \|A^T\tilde{w} - b\|_2$ の一般解は $\tilde{w} = Mb + \{I - MA^T\}y$ で与えられる. ただし, $y \in R^{|E|}$ は任意の実数値ベクトルである.

これより, 次の結果が得られる.

定理 3.2 問題 *(4)* に対して、$AA^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ は正則行列であり、$Q = (AA^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1}A$ とおくと, $AA^T\tilde{w} = Ab$ の一般解 $\tilde{w}$ は次式で与えられる.

$$\tilde{w} = Qb + \frac{\tilde{\alpha}}{n}\mathbf{1}, \tag{5}$$

ただし, $\tilde{\alpha}$ は任意の実数である.

本稿では, 式 (5) で与えられる $\tilde{w}$ を $\tilde{\alpha}-$重要度ベクトルと呼び, 逆対数変換したベクトル w を $\alpha-$重要度ベクトルと呼ぶことにする.

次に, すべての評価者が全一対比較を行う場合, つまり, $|K| = L|E|$ であり $\bar{K} = \emptyset$ である. このとき $AA^T + \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ の対角要素は Ln であり, 非対角要素は 0 である. また, Ab の第 i 要素は, $-\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{L}\tilde{x}_{ji}^l + \sum_{j=i+1}^{n}\sum_{l=1}^{L}\tilde{x}_{ij}^l$ と書ける. ここで, $\tilde{x}_{ji}^l + \tilde{x}_{ij}^l = 0$ より, Ab の第 i 要素は $\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{L}\tilde{x}_{ij}^l$ となるので, 以下の系を得る.

系 3.3 すべての評価者が全一対比較を行う場合, $\tilde{\alpha}-$重要度ベクトルは次のように与えられる.

$$\tilde{w}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\{\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\tilde{x}_{ij}^l\} + \frac{\tilde{\alpha}}{n}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

系 3.3 の $\tilde{w}$ を対数逆変換すれば, $w_i = \sqrt[n]{\alpha\prod_{j=1}^{n}z_{ij}}$, $i = 1, \ldots, n$, が得られる. ただし, $z_{ij} = \sqrt[L]{\prod_{l=1}^{L}x_{ij}^l}$, $i, j = 1, \ldots, n$, である. 式 $w_i = \sqrt[n]{\alpha\prod_{j=1}^{n}z_{ij}}$ において, $w^T\mathbf{1} = 1$ であるように α をきめれば, いわゆる幾何平均法となることがわかる. また, 式 $z_{ij} = \sqrt[L]{\prod_{l=1}^{L}x_{ij}^l}$ から, 全一対比較を前提とした場合, 複数の評価者による各一対比較の幾何平均値をもって, グループの一対比較値とすることの妥当性が示される. さらに, 評価者が単独, すなわち $L = 1$ ならば, 式 $w_i = \sqrt[n]{\alpha\prod_{j=1}^{n}z_{ij}}$ は幾何平均法そのものである.

重複評価がなく, ある代替案間に対して一対比較されていない場合は, いわゆる不完全データを伴う AHP であり, $\bar{K} \neq \emptyset$ かつ $|K| = |E|$ である. この時の一対比較グラフを G, 一対比較ネットワークを $\mathcal{N}$ とする. 重複評価がないので, 得られた一対比較値群 $x_{ij}^l\,(i,j) \in K_l(l = 1, \ldots, L)$ を $x_{ij}(i,j) \in K$ と記す. さらに、$x_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$ とし, $x_{ji} = 1/x_{ij}\,(i,j) \in K$ とする. ハーカー法 [2] は導出すべき重要度 $w_i\,(i = 1, \ldots, n)$ が存在するものとして, ξ_{ij} を第 (i,j) 要素として持つ一対比較行列 Ξ を補完モデル (7) により構成し, 一対比較行列 Ξ に対して重要度ベクトルを算出する.

$$\xi_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & (i,j) \notin \bar{K} \text{である場合} \\ w_i/w_j & (i,j) \in \bar{K} \text{である場合} \end{cases}. \tag{7}$$

式 (7) の両辺に対数変換を行うと,

$$\tilde{\xi}_{ij} = \begin{cases} \tilde{x}_{ij} & (i,j) \in K \text{ である場合} \\ \tilde{w}_i - \tilde{w}_j & (i,j) \in \bar{K} \text{である場合} \end{cases} \tag{8}$$

が得られる. ここで, 式 (8) に対応する一対比較グラフを G^*, 一対比較ネットワークを $\mathcal{N}^*$ とする. 一対比較ネットワーク $\mathcal{N}^*$ は $(i,j) \in \bar{K}$ である点 i から点 j への枝を $\mathcal{N}$ に追加してその容量を $\tilde{w}_i - \tilde{w}_j$ として得られるものである. 補完しない場合の問題 (4) に冗長な情報を追加したものが, 式 (8) で得られる問題 (4) であることがわかる. つまり, 不完全データに対してハーカー法に倣った補完モデル (8) により構成された問題 (4) から得られる重要度ベクトルと不完全データのままでの問題 (4) から得られる重要度ベクトルは一致するので, 式 (5) は幾何平均法におけるハーカー法と解釈することも可能である.

4 おわりに

提案した枠組み「大規模 AHP」は, 既存の AHP の自然な拡張であることを示した. また, 大規模 AHP は適用事例に応じて手軽に拡張, 変更できる.

本枠組みにおける重要度算出法に関しては, 今後様々な検討, 適用事例での検証を行う必要がある. さらに,Saaty の定義した整合度に対応した, 重要度に対する信頼性の尺度を確立する必要がある.

参考文献

[1] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville: *Generalized inverses:theory and applications* , John Wiley & Sons,1974.

[2] P.T. Harker: Alternative modes of qustioning in the analytic hierarchy process, *Mathematical Modelling,* Vol. 9 (1987) 353-360.