1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

重み付き多数決ゲームでの投票力指数計算の $\mathcal{NP}$ 完全性

01605630 東京都立大学 ＊松井 泰子 MATSUI Yasuko
01605000 東京大学 松井 知己 MATSUI Tomomi

1 はじめに

本稿では，重み付き多数決ゲームでの，シャープレイ・シュービック指数の比較とバンザフ指数の比較が，$\mathcal{NP}$- 完全である事を示す．

2 定義

$N=\{1,2,\ldots,n\}$ をプレイヤーの集合とする．このとき，ベクトル $G=(q;w_1,w_2,\ldots,w_n)$ を**重み付き多数決ゲーム**と呼ぶ．ただし，w_i は，**プレイヤー i の持つ票数の重み**で非負の整数，q は，**投票の勝つために必要な票数**で，$1/2\sum_{\forall i}w_i<q\leq\sum_{\forall i}w_i$ を満たす整数とする．プレイヤーの部分集合 $S\subseteq N$ を**提携**と呼ぶ．提携 S が $\sum_{j\in S}w_j\geq q$ を満たすとき，S を**勝利提携**と呼び，$\sum_{j\in S}w_j<q$ を満たすとき，S を**敗北提携**と呼ぶ．プレイヤーの順列 $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ に関し，$\{\pi_1,\ldots,\pi_{i-1}\}$ が敗北提携，$\{\pi_1,\ldots,\pi_{i-1},\pi_i\}$ が勝利提携であるとき，プレイヤー π_i を π に関する**ピボット**と呼ぶ．原シャープレイ・シュービック指数ベクトル $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ で表わす．ただし，φ_i は，N の全順列の中でプレイヤー i がピボットとなる個数である．任意の提携 S と，任意のプレイヤー i に対し，提携のペア $\{S,S\triangle\{i\}\}$ が各々，勝利提携と敗北提携であるとき，プレイヤー i を S に関する**スイング**と呼ぶ．ただし，$\triangle$ は対称差を表わすものとする．原バンザフ指数をベクトル $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ で表わす．ただし，β_i は，プレイヤー i がスイングとなる提携の個数である．

3 原シャープレイ・シュービック指数計算の $\mathcal{NP}$- 完全性

原シャープレイ・シュービック指数に関し，以下の問題を定義する．

<u>問題 SS1</u>
INSTANCE: $n\in Z_{++},G=(q;w_1,w_2,\ldots,w_n)\in Z_{+}^{n+1}$．ただし $(1/2)\sum_{i=1}^{n}w_i<q\leq\sum_{i=1}^{n}w_i$，$w_1\geq w_2\geq\cdots\geq w_n$ を仮定する．
QUESTION: G の原シャープレイ・シュービック指数 $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ は $\varphi_n>0$ を満たすか？

本稿では，問題 SS1 が $\mathcal{NP}$- 完全である事を示すために，以下のナップサック (KP) 問題から多項式時間帰着可能である事を証明する．

<u>問題 KP</u>
INSTANCE: $k\in Z_{++},(a_1,a_2,\ldots,a_k)\in Z_{++}^{k}$．ただし $(1/2)\sum_{i=1}^{k}a_i$ は整数を仮定する．
QUESTION: $\sum_{i\in S}a_i=(1/2)\sum_{i=1}^{k}a_i$ を満たす部分集合 $S\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$ は存在するか？

定理 1 問題 SS1 は $\mathcal{NP}$- 完全である．
証明: 問題 KP を解くために，重み付き多数決ゲーム $G^*=(q;a_1,a_2,\ldots,a_{k-1},a_k,1)$ を構築する．このとき，$q=1/2\sum_{i=1}^{k}a_i+1$ である．また，G^* の原シャープレイ・シュービック指数を $\varphi^*=(\varphi_1^*,\ldots,\varphi_{k+1}^*)$ と定義する．

問題 SS1 が $\mathcal{NP}$ であることは明らか．命題を証明するためには，「$\varphi_{k+1}^*>0$ である必要十分条件は，問題 KP が YES の答えを持つ事」を示せば良い．

$\varphi_{k+1}^*>0$
$\Rightarrow\exists$ 順列 $\pi^*=(\pi_1^*,\ldots,\pi_{k+1}^*)$，プレイヤー $k+1$ は π^* に関するピボットである．

$(S:=\{\pi_1^*,\pi_2^*,\ldots,\pi_{i-1}^*\}$，ただし $\pi_i^*=k+1$ とする.)
$\Rightarrow\sum_{i\in S}a_i<q\leq\sum_{i\in S}a_i+1$
$\Rightarrow q$ の整数性から，$q=\sum_{i\in S}a_i+1$
$\Rightarrow 1/2\sum_{i=1}^{k}a_i=q-1=\sum_{i\in S}a_i$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$\Rightarrow$ 問題 **KP** は **YES** の答 S を持つ.
同様にして，逆を証明する事が出来る. □

系 2 原シャープレイ・シュービック指数計算は $\mathcal{NP}$-困難である.

G^* の原シャープレイ・シュービック指数 φ^* が得られていれば， 問題 **SS1** の質問に答えることが出来るので，系 **2** は明らかである.

また，票の重みが一番大きいプレイヤーと二番目に大きなプレイヤーが持つ指数に注目すると，以下の問題を解く必要がある.

<u>問題 **SS2**</u>
INSTANCE: $n \in Z_{++}, G = (q; w_1, w_2, \ldots, w_n) \in Z_+^{n+1}$. ただし $(1/2)\sum_{i=1}^n w_i < q \leq \sum_{i=1}^n w_i$, $w_1 > w_2 \geq \cdots \geq w_n$ を仮定する.
QUESTION: G の原シャープレイ・シュービック指数 $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ は $\varphi_1 > \varphi_2$ を満たすか？

問題 **SS2** は，問題 **SS1** 同様，問題 **KP** から多項式時間帰着可能である事を証明する事が出来る.

定理 3 問題 **SS2** は $\mathcal{NP}$- 完全である.

4 原バンザフ指数計算の $\mathcal{NP}$- 完全性

原バンザフ指数に関し，以下の問題を定義する.

<u>問題 **BZ1**</u>
INSTANCE: $n \in Z_{++}, G = (q; w_1, w_2, \ldots, w_n) \in Z_+^{n+1}$. ただし $(1/2)\sum_{i=1}^n w_i < q \leq \sum_{i=1}^n w_i$, $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ を仮定する.
QUESTION: G の原バンザフ指数 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ は $\beta_n > 0$ を満たすか？

問題 **BZ1** は，問題 **SS1** 同様，問題 **KP** から多項式時間帰着可能である事を証明出来る.

定理 4 問題 **BZ1** は $\mathcal{NP}$- 完全である.

系 5 バンザフ指数計算は $\mathcal{NP}$- 困難である.

また，票の重みが一番大きいプレイヤーと二番目に大きなプレイヤーが持つ指数に注目すると，原バンザフ指数では，以下の問題を解く必要がある.

<u>問題 **BZ2**</u>
INSTANCE: $n \in Z_{++}, G = (q; w_1, w_2, \ldots, w_n) \in Z_+^{n+1}$. ただし $(1/2)\sum_{i=1}^n w_i < q \leq \sum_{i=1}^n w_i$, $w_1 > w_2 \geq \cdots \geq w_n$ を仮定する.
QUESTION: G の原バンザフ指数 $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ は $\beta_1 > \beta_2$ を満たすか？

定理 6 問題 **BZ2** は $\mathcal{NP}$- 完全である.

参考文献

[1] J.F.Banzhaf III, *Weighted Voting Doesn't Work*, Rutgers Law Review, 19 (1965), pp.317-343.

[2] X.Deng and C.Papadimitriou, *On the complexity of cooperative solution concepts*, Mathematics of Operations Research, 19 (1994), pp.257-266.

[3] M.R.Garay and D.S.Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of $\mathcal{NP}$-completeness*, W.H.Freeman and Company, 1979.

[4] R.M.Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, in R.E.Miller and J.W.Thatcher eds., Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York, 1972, pp.85-103.

[5] W.F.Lucas, *Measuring power in weighted voting systems*, in S.J.Brams, W.F.Lucas and P.D.Straffin eds., *Political and related models*, Springer-Verlag, 1983, pp.183-238.

[6] L.S.Shapley and M.Shubik, *A method for evaluating the distribution of power in a committee system*, *American Political Science Review*, 48 (1954), pp.787-792.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．