1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Noisy-vs.-Silent Duel with Arbitrary Moving

01101594　関西大学工学部　栗栖 忠　KURISU Tadashi

1．はじめに

二人のプレイヤー I，II が1発づつ弾丸の入った銃を持っている。時刻$t=0$で２人のプレイヤーの距離は１だけ離れている。Ｉは相手の方向へも、その逆方向へも自由に動くことができるが、IIは動く事ができず、常に定点１にいる。Ｉが x $(0 \le x \le 1)$にいるとき、I，IIが相手をめがけて発砲すると相手に弾丸が当たる確率は各々 $p(x)$，$q(x)$ であるとする。$p(x)$，$q(x)$ は$p(0)=q(0)=0$，$p(1)=q(1)=1$を満たす[0 ,1]上の単調増加関数であるとする。どちらか一方のプレイヤーに弾丸が当たるか、両プレイヤーがともに発砲し終わるとゲームは終了する。ＩがIIより先に相手に弾丸を当てるとＩの利得は ＋1、IIがＩより先に相手に弾丸を当てるとＩの利得は－１、その他の場合のＩの利得は０とし、Ｉ（II）はＩの利得の期待値をできるだけ大きく（小さく）したいものとする。さて、銃はその銃の所有者が発砲したとき、相手に発砲したことが直ちに分かるとき noisy であるといい、相手に発砲したことが分からないとき silent であるという。両プレイヤーの銃がともに silent である場合は Trybura [1] によって解析された。また、 Trybula [2] は両プレイヤーの銃がともに noisy であり$p(x)=q(x)=x$である場合をも解析している。更に、Kurisu [3] はＩが silent な銃を持ち，IIが noisy な銃を持つ場合の解析を行った。 以下では、Ｉは noisy な銃を持ち、IIは silent な銃を持っており，精度関数が一般の場合について述べる。

2．.問題

ここでは、$p(x)$，$q(x)$はともに連続で正なる導関数$p'(x)$、$q'(x)$を持つものとする。プレイヤーＩが発砲し、IIに当てることができなかったとする。このとき、Ｉは相手に近づけば、相手に弾丸を当てられる確率は増加するので直ちに相手から逃げだす。すると、IIは相手が失敗したことが分かるが躊躇していては相手を当てる確率は減少するから直ちに発砲する。 明らかに、両プレイヤーの最適戦略はこのような形をとるので、以後このような戦略だけを考えることにする。 このとき、Ｉが x にいるときＩが発砲し、Ｉが yにいるときIIが発砲したときのＩの期待利得は

$$M(x,y)=\begin{cases} p(x)-\{1-p(x)\}q(x), & x<y \\ p(x)-q(x), & x=y \\ -q(y)+\{1-q(y)\}p(x), & x>y \end{cases}$$

となる。 考察されているタイミング・ゲームでは２つの領域 $x<y$， $x>y$ のいずれでも$M(x,y)$はxについて増加関数でありyについて減少関数であるが、このモデルでは、$x<y$のとき$M(x,y)$はxについて増加関数とはならない。

以下では、Ｉの戦略として、$\{f(x),\ \alpha\}$ IIの戦略として$\{g(x)\}$で表わされるものを考える。ここで、

$$\int_a^1 f(x)dx+\alpha=1 \tag{1}$$

$$\int_a^1 g(x)dx=1 \tag{2}$$

を満たす。Ｉが $\{f(x),\ \alpha\}$で表わされる戦略を用い、Ｉがyにいてまだ発砲していなくてIIが発砲したときの期待利得を $v_1(y)$ で表わす。 また、IIが $\{g(y)\}$を用い、Ｉがxにいるとき、Ｉが発砲したときのＩの期待利得を $v_2(x)$で表わす。

3．補題

以下では，$p(x)-q(x)+p(x)q(x)$ は単峰であるとし，$[0,\ b]$で単調減少、$[b,\ 1]$では単調増加であるとする。特に$p(x)=x^m$ 、 $q(x)=x^n$ $(m>0,\ n>0)$ のときにはこの条件を満足する。

補題 2． 次の式 （3）は高々１つの解を持つ。特に、$p(x)-q(x)+p(x)q(x)$が（0，1）で単調増加であれば、（3）は （0，1）

に唯一の解を持つ。

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_x^1 \frac{q'(t)}{p(t)q(t)}dt\right\}$$

$$+\int_x^1 \frac{q'(t)}{p(t)q(t)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_x^t \frac{q'(u)}{p(u)q(u)}du\right\}dt$$

$$=\frac{2\{1-q(x)\}}{1+p(x)-q(x)+p(x)q(x)}q(x)^{-\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

次の二つの補題では（３）は $[b,\ 1]$ に解 a を持つものとする。

補題 3.

$$f(x)=\frac{c_1 q'(x)}{p(x)\{q(x)\}^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_a^x \frac{q'(t)}{p(t)q(t)}dt\right\}$$

$$\alpha=c_1\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_a^1 \frac{q'(t)}{p(t)q(t)}dt\right\}$$

$$c_1=\frac{1+p(a)-q(a)+p(a)q(a)}{2\{1-q(a)\}}q(a)^{\frac{1}{2}}$$

とおく。このとき、$\{f(x),\ \alpha\}$は（１）を満たし、すべての $y\in[a,\ 1]$について

$$v_1(y)=p(a)-\{1-p(a)\}q(a)$$

が成立する。

$$E(x)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_x^1 \frac{q'(t)}{p(t)q(t)}dt\right\}$$

$$+\int_x^1 \frac{q'(t)}{p(t)q(t)^{\frac{3}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_x^t \frac{q'(u)}{p(u)q(u)}du\right\}dt$$

とおく。

補題 4.

$$g(x)=\frac{(v+1)\left[2q(x)p'(x)-\{1-p(x)\}q'(x)\right]}{4p^2(x)q^2(x)}$$

$$+\frac{(v+1)\left[\{-p^2(x)\}q'(x)-2q(x)p'(x)\right]}{8p^2(x)q(x)^{\frac{3}{2}}}E(x)$$

$$v=p(a)-q(a)+p(a)q(a)$$

とする。この時、$g(x)$は（２）を満たし，かつ $x\in[a,\ 1]$ である全ての xについて

$$v_2(x)=p(a)-q(a)+p(a)q(a)$$

が成立する。

4．最適戦略

常に０にいて動かないというＩの戦略を I_0 と表わす。

定理

（ｉ）（３）が $[b,\ 1]$上に解 aを持ち $p(a)-q(a)+p(a)q(a)\geq 0$ ならば補題 ３で与えられた $\{f(x),\ \alpha\}$ はＩの最適戦略であり、補題 ４で与えられた$\{g(x)\}$はⅡの最適戦略である。また、ゲームの値は $p(a)-q(a)+p(a)q(a)$ である。

（ⅱ）（３）が $[b,\ 1]$ 上に解を持ち $p(a)-q(a)+p(a)q(a)<0$ ならば I_0 はＩの最適戦略であり、補題 ４で与えられた$\{g(y)\}$はⅡの最適戦略である。また、、ゲームの値は ０ である。

（ⅲ）(3)が$[b,\ 1]$上に解を持たないならば、I_0 はＩの最適戦略であり、$\{h(y)\}$はⅡの最適戦略である。またゲームの値は、０である。

5．例

参考文献