1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

線的市場における一期間競合在庫モデル

02501614　大阪府立大学　*北條仁志　HOHJO Hitoshi
01302694　大阪府立大学　寺岡義伸　TERAOKA Yoshinobu

1．モデル

Player I, IIと呼ばれる2人のプレーヤがある製品を同時に販売し始め、市場を分け合う。Player Iは[0, 1]区間上の位置0に、Player IIは位置1に配置されている。各プレーヤの発注は期首に一度だけ可能であるとする。不足が生じた場合には、バックログされないものとする。Playerは在庫がなければ信用を失うという意味でペナルティを受ける。

客は[0, 1]区間上に一様に分布しており、地点xの客は確率$1-x$でPlayer Iへ、確率xでPlayer IIへ一人一個の製品を購入しに行く。もし最初に訪れたPlayerに在庫がなければもう一方のPlayerへ行くものとする。客は各地点を同時に出発し、到着時間は移動距離に比例するとする。そのとき、計画期間としては$2t$であると考えることができる。このモデルではPlayer IとIIは非協力的であるとし、各Playerの目的は発注、維持、不足に伴う総費用を最小化することにある。主問題は各Playerが期首にどれだけ発注しておけばよいのかである。そこで発注量z_1, z_2は独立して決定される。このモデルで用いられる記号を以下に述べる：

b	:	市場上に与えられた客数（需要量）
z_i	:	Player $i(i=1,2)$の発注量
r_i	:	Player $i(i=1,2)$の単位当たりの販売価格，　$r_i \geq c_i$
c_i	:	Player $i(i=1,2)$の単位当たりの発注費用
h_i	:	Player $i(i=1,2)$の単位当たりの維持費用
p_i	:	Player $i(i=1,2)$の単位当たりのペナルティコスト
t	:	単位距離当たりの移動時間
$C_j^i(z_1,z_2)$	:	Player $i(i=1,2)$の期平均総費用$(j=1,\cdots,6)$

Situation 1:　$z_1 \geq b/2$かつ$z_2 \geq b/2$の場合

この状況では到着する客すべてに供給することができ、両プレーヤ共に不足は生じない。

$$C_1^i(z_1,z_2) = [c_i+h_i]z_i - [5h_i/12 + r_i/2]b.$$

$C_1^i(z_1,z_2)$はz_iに関する線形増加関数であるので、$C_1^i(z_1,z_2)$を最小にする最適発注量z_iは$z_i^* = b/2$である。

Situation 2:　$0 \leq z_1 < b/2$かつ$z_2 \geq b/2,\ z_1+z_2 \geq b$の場合

この状況ではSituation 1と同様にすべての客に対して供給できる。Player I側に不足が生じるが、その満たされない客はPlayer II側で満たされることになる。$z_1 - Tb/t + T^2b/(2t^2) = 0$を満たす時刻$0<T<t$を$t_1$とおく。そのとき$t_1$は$z_1$の関数であるとみなすことができる。

$$C_2^1(z_1,z_2) = [c_1 + h_1/6 - 5p_1/6 - r_1]z_1 + (h_1+p_1)[2z_1 - b]t_1/(6t) + 5p_1b/12.$$

$C_2^1(z_1,z_2)$はz_1に関して狭義凸関数である。条件$c_1 - p_1 < r_1 < c_1 + (h_1-p_1)/2$の下で最適発注量$z_1^* = 2(c_1 - r_1 + h_1)(r_1 - c_1 + p_1)b/(h_1+p_1)^2 (< b/2)$が得られる。

$$C_2^2(z_1,z_2) = [c_2+h_2]z_2 + [h_2/3 + r_2]z_1 - [7h_2/12 + r_2]b + h_2[b-2z_1]t_1/(6t).$$

$C_2^2(z_1,z_2)$はz_2に関して線形増加関数であるので、最適発注量z_2は$z_2^* = b/2$である。

Situation 3:　$0 \leq z_1 < b/2$かつ$z_2 \geq b/2,\ z_1+z_2 < b$の場合

この状況ではPlayer I側で満たされない客がPlayer II側に行っても満たされるとは限らない。Player Iの最適在庫量z_1^*はSituation 2と同様であり、条件$c_1 - p_1 < r_1 < c_1 + (h_1-p_1)/2$の下で$z_1^* = 2(c_1 - r_1 + h_1)(r_1 - c_1 + p_1)b/(h_1+p_1)^2 (< b/2)$である。$z_1 + z_2 - 2Tb/t + T^2b/(2t^2) + b = 0$を満たす時刻$t + t_1 \leq T \leq 2t$を$t_2$とおく。そのとき$t_2$は$z_1$と$z_2$の関数であるとみなすことができる。

$$C_3^2(z_1,z_2) = [c_2 + h_2/3 - 2p_2/3 - r_2]z_2 - [h_2/3 + 2p_2/3]z_1 + [h_2/12 + 2p_2/3]b$$
$$+ h_2[b-2z_1]t_1/(6t) + (h_2+p_2)(z_1+z_2-b)t_2/(3t).$$

$C_3^2(z_1,z_2)$はz_2に関して狭義凸関数である。条件$c_2 + (h_2-p_2)/2 + (h_2+p_2)(r_1-c_1+p_1)/(h_1+p_1) < r_2 <$

c_2+h_2 の下で最適発注量 $z_2^* = b/2+(2r_1-2c_1-h_1+p_1)^2b/(2(h_1+p_1)^2)-2(r_2-c_2-h_2)^2b/(h_2+p_2)^2$ が得られる。

Situation 4:　$0 \le z_1 < b/2$ かつ $0 \le z_2 < b/2$ の場合

この状況では各プレーヤに訪れた最初の方の客のみが満たされ、初めて訪れたPlayerによって満たされなければその後も満たされない。そこで t_3 は $z_2 - Tb/t + T^2b/(2t^2) = 0$ を満たす時刻 $0 \le T \le t$ である。そのとき t_3 は z_2 の関数であるとみなすことができる。

$$C_4^1(z_1,z_2) = [c_1+h_1/6-5p_1/6-r_1]z_1+(h_1+p_1)[2z_1-b]t_1/(6t)$$
$$+p_1[-z_2/3+7b/12+t_3z_2/(3t)-t_3b/(6t)].$$

$C_4^1(z_1,z_2)$ は z_1 に関して狭義凸関数である。Situation 2と同様に条件 $c_1-p_1 < r_1 < c_1+(h_1-p_1)/2$ の下で最適発注量 $z_1^* = 2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)b/(h_1+p_1)^2(< b/2)$ を得る。$C_4^2(z_1,z_2)$ は $C_4^1(z_1,z_2)$ と同様にして条件 $c_2-p_2 < r_2 < c_2+(h_2-p_2)/2$ の下で最適発注量 $z_2^* = 2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)b/(h_2+p_2)^2(< b/2)$ を得る。

Situation 5:　$z_1 \ge b/2$ かつ $0 \le z_2 < b/2,\ z_1+z_2 \ge b$ の場合

この場合にはSituation 2においてPlayer IとIIの役割を交替すればよい。ゆえに条件 $c_2-p_2 < r_2 < c_2+(h_2-p_2)/2$ の下で最適発注量 $z_1^* = b/2$ と $z_2^* = 2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)b/(h_2+p_2)^2(< b/2)$ が得られる。

Situation 6:　$z_1 \ge b/2$ かつ $0 \le z_2 < b/2,\ z_1+z_2 < b$ の場合

この場合にはSituation 3においてPlayer IとIIの役割を交替すればよい。ゆえに条件 $c_1+(h_1-p_1)/2+(h_1+p_1)(r_2-c_2+p_2)/(h_2+p_2) < r_1 < c_1+h_1,\ c_2-p_2 < r_2 < c_2+(h_2-p_2)/2$ の下で最適発注量 $z_1^* = b/2+(2r_2-2c_2-h_2+p_2)^2b/(2(h_2+p_2)^2)-2(r_1-c_1-h_1)^2b/(h_1+p_1)^2$ と $z_2^* = 2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)b/(h_2+p_2)^2(< b/2)$ が得られる。

2．平衡解析

前節で得られた最適発注量 z_i^* をPlayer i の純戦略の一つとして考えてみよう。我々はこの純戦略をもとにして利得行列を与え、平衡点を見つけるという方法で解析を行う。このモデルでは6つのCaseを必要としたが、ここではその一つを述べておく。

Case 1：　Player Iは純戦略として $\mathrm{I}_1 = \frac{b}{2},\ \mathrm{I}_2 = 2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)b/(h_1+p_1)^2(< b/2)$ をとり、Player IIは純戦略として $\mathrm{II}_1 = b/2,\ \mathrm{II}_2 = 2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)b/(h_2+p_2)^2(< b/2)$ をとる。このとき、次のような利得行列を得ることができる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{II}_1 & \mathrm{II}_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (C_1^1(b/2,b/2), C_1^2(b/2,b/2)) & (C_6^1(b/2,z_2^0), C_6^2(b/2,z_2^0)) \\ (C_3^1(z_1^0,b/2), C_3^2(z_1^0,b/2)) & (C_4^1(z_1^0,z_2^0), C_4^2(z_1^0,z_2^0)) \end{array} \right) \end{array}$$

そこで z_1^0 は I_2 の値を、z_2^0 は II_2 の値を表す。各成分の値から次のような不等式が得られる：

$c_1-p_1 < r_1 < c_1+(h_1-p_1)/2$ より

$$C_1^1(b/2,b/2) > C_3^1(z_1^0,b/2).$$

連続性 $C_6^1(b/2,z_2^0) = C_4^1(b/2,z_2^0)$ と C_4^1 の最適性より

$$C_4^1(z_1^0,z_2^0) < C_6^1(b/2,z_2^0).$$

Player IIに対しても同様に

$$C_1^2(b/2,b/2) > C_6^2(b/2,z_2^0),\ C_4^2(z_1^0,z_2^0) < C_3^2(z_1^0,b/2)$$

を得る。よって平衡点は $(2(c_1-r_1+h_1)(r_1-c_1+p_1)b/(h_1+p_1)^2, 2(c_2-r_2+h_2)(r_2-c_2+p_2)b/(h_2+p_2)^2)$ である。

当日は確率をより一般化したモデルについて得られる性質等について報告する予定である。

参考文献

[1] 北條仁志, 寺岡義伸：「一様な需要分布における競合在庫問題」1997年度日本ＯＲ学会秋季研究発表会アブストラクト集, pp.208-209, (1997).