1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

情報エントロピーからみたAHPとロジットモデルの関係

関西新技術研究所　＊尾崎都司正　OZAKI Toshimasa
01104744　名城大学　木下　栄蔵　KINOSHITA Eizo

1．はじめに

意思決定モデルには，交通行動分析等に利用されているロジットモデルと，Saatyが提唱したＡＨＰ法が代表的であるが，これら２つのモデルの関係についての研究はみられない。ここでは，情報エントロピーを介した両モデルの関係を検討し，線形効用関数型ロジットモデルにおけるパラメータ選定にＡＨＰ法が有用であることを示す。

2．両モデルの関係

(1)情報エントロピーによるモデルの検討

代表的なロジットモデルの誘導法であるMcFaddenの導出方法は，Thurstoneの選択理論から出発したが，その確率密度関数$\lambda(e)$には疑問が呈せられている。

この確率密度関数の累積分布関数qのエントロピー関数$H(q)$は，

$$H(q) = -q\log q = \exp(-e)\exp\{-\exp(-e)\} = \lambda(e) \tag{1}$$

のように確率密度関数になるところから，McFaddenの方法も情報エントロピーが介在していると考えられる．

集団の中の，ある意思決定者の（個人的）選択確率は，ロジットモデルで表示できる。このモデルは、選択確率の対数による情報エントロピーと，期待効用をもとにしたエントロピーモデルから誘導できる。

集団意思決定に関して，選択肢iの平均選択確率をX_i，k番目の意思決定者の選択確率P_{ik}とすると，選択肢iに関して情報量のバランス式が成立する。

$$-(1/N)\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} P_{ik}\log P_{ik} = -\sum_{i=1}^{m} X_i \log X_i \tag{2}$$

また，集団の平均期待効用値も

$$\sum_{k=1}^{N} E_k = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} V_{ik}P_{ik} = N\sum_{i=1}^{m} U_i X_i \tag{3}$$

となるU_iを定義する。これらの２つの式から，エントロピーモデルにより，集団意思決定でもロジットモデルが適用できる。

一方，ＡＨＰは，意思決定者の一対比較が試行過程$X_{(0)}$，$X_{(1)}$，……，$X_{(n)}$，…を経て最終な評価に至ると考えらると，各試行過程の不確かさ$H_{(i)}$は，イエンゼンの不等式より

$$H_{(0)} \le H_{(1)} \le \cdots\cdots \le H_{(n)} \le \cdots \tag{4}$$

となり，最大可能な情報エントロピーに近づく。意思決定においては，それだけの情報が付与されると，意思決定が行なえることになる。

すなわち，ＡＨＰにおける意思決定の選好過程をMarkov過程と考えるとcriterionの比較を通じて，不確実性が解消すると解釈できる。

(2)　２つのモデルの関係

代替案あるいは選択肢iに関する集団の平均効用値は，その特性値Z_{ij}をもちいて次のように表わすことが一般的である。

$$U_i = \sum_{j=1} \beta_j Z_{ij} \tag{5}$$

この効用値を対数変換すると形式的にロジットモデルが得られが，効用値に関する Weber-Fechner の精神物理法則の制約をクリアーできない。

ＡＨＰはカテゴリーに従って，複数人に判断させる意思決定手法であり，この判断は一様ではないからＡＨＰの評価値は，確率変数になる。

$$v_i = \frac{W_i}{\sum W_k} \tag{6}$$

$$W_i = \dot{\beta}_1 Z_{i1} + \dot{\beta}_2 Z_{i2} + \cdots = \sum_{j=1} \beta_j Z_{ij} \tag{7}$$

従って，ロジットモデルにおける選択確率とＡＨＰの評価値との関係が規定できる。

$$Q = {}^{\exp \kappa v_i} \Big/ \sum {}_{\exp \kappa v_i} - v_i = 0 \tag{8}$$

とすると，ＡＨＰの効用尺度が選択確率となるだけでなく，Luce の定理と集計ロジットモデルとの関係も明らかにできる。そして，AHP は線形効用関数のパラメータ導出に有用な方法となる。

３．検証

16個のアーズメント施設を代替案とする施設の集客評価に関して、両モデルの一致性を検証した。検証結果を図１に示す。ロジットモデルは不確定が最大の条件で誘導されるが，ＡＨＰでも，Markov過程と考えると不確実性が最大となり，情報エントロピーの面では，ロジットモデルもＡＨＰも同じモデルといえる。

なお，本研究においては，m 個のＡＨＰ値をもとに式(8)の k を最大値および最小値を v_{min}, v_{max} と標準偏差 σ の４つの説明変数を用いた近似式を得た。

また，ＡＨＰ評価には絶対評価法と Inner Dependenve 法を用いた。

表1. 要因間の一対比較

	時　間	入場料	ﾚｽﾄﾗﾝ	水族館	固有ﾍﾞｸﾄﾙ
時　間	1	4	4	1/4	0.23383
入場料	1/4	1	3	1/6	0.09774
ﾚｽﾄﾗﾝ	1/4	1/3	1	1/9	0.05018
水族館	4	6	9	1	0.61846

λ=4.18977　CI=0.06326

$$\begin{array}{l} \\ \text{交通時間} \\ \text{入場料} \\ \text{ﾚｽﾄﾗﾝ} \\ \text{水族館} \end{array}
\begin{array}{c} \text{影響度を表すベクトル} \\ \begin{bmatrix} 0.8333 & 0.1321 & 0.1677 & 0 \\ 0 & 0.6181 & 0 & 0 \\ 0.1667 & 0.0574 & 0.4836 & 0 \\ 0 & 0.1924 & 0.3487 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
\times
\begin{array}{c} \text{従属性なしの固有ベクトル} \\ \begin{bmatrix} 0.2338 \\ 0.0977 \\ 0.0501 \\ 0.6184 \end{bmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{c} \text{従属性を考慮した固有ベクトル} \\ \begin{bmatrix} 0.2162 \\ 0.0604 \\ 0.0688 \\ 0.6545 \end{bmatrix} \end{array}$$

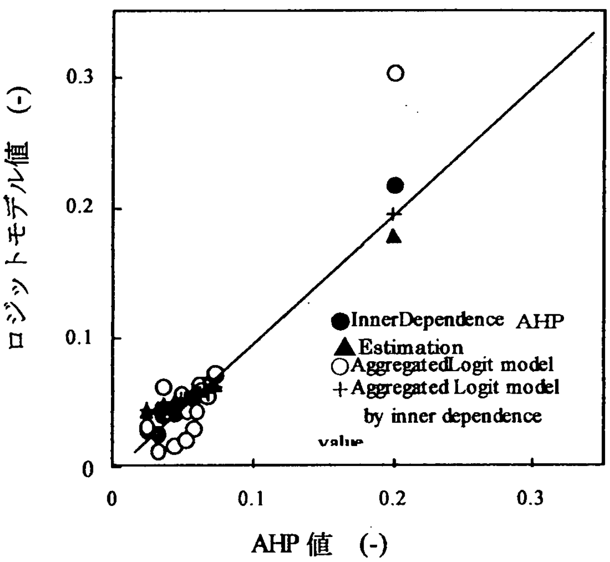

図1. ＡＨＰとロジットモデルの関係

参考文献

1)木下栄蔵，ＡＨＰ手法と応用技術，総合技術ｾﾝﾀｰ，1993

2) Saaty T., The Analytic Network Process, RWS Publications, 1996

3)Yellott, The Relationship between Luce's Choice Axiom, *J. Mathematical Psychology* ,Vol.15, pp.109-144, 1977