1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

最適保全スケジュールのノンパラメトリック推定に関する一工夫

土肥正† (01307065)，永井秀治†，海生直人‡ (01105445)，尾崎俊治† (01002265)
†広島大学工学部，‡広島修道大学経済科学部

1. はじめに

標準総試験時間統計量 (scaled total time on test statistics: 以下では 標準 TTT 統計量) ならびに標準 TTT プロット [1] は，観測データの年齢特性や理論分布への適合性を特徴づける方法として有効であるだけでなく，確率的保全問題に関連したある種の最適化問題のノンパラメトリック解法に応用できることが知られている [2, 3]．しかしながら，文献 [3] において指摘されたように，標準 TTT 統計量に基づいた最適解の推定量は一致推定量となるが，その漸近収束速度は必ずしも速くはない．

標準 TTT プロットは，観測データに基づいた標準 TTT 統計量の折れ線による補間関数であり，安定性およびデータへの適合性だけを問題にするならば，標準 TTT プロットは元の確率分布関数の標準 TTT 変換に対する最良の近似関数となる．しかしながら，標準 TTT プロットを最適化問題に応用する場合，近似関数も相応の解析性を有する必要があるにもかかわらず，従来の標準 TTT プロットではそのような解析性が無視されていることが問題として挙げられる．

そこで本稿では，文献 [2] において論議された修理限界取替え問題を例にとりあげ，標準 TTT プロットを解析関数を用いて近似することによって，より高い精度で最適保全問題の解を推定する手続きについて述べる．具体的には，標準 TTT 統計量を N-スプライン関数 [4] で補間することにより，未知の理論分布に対する標準 TTT プロットを近似することを試みる．最終的に数値例において，提案された手法の有効性を検討するとともに，今後の課題について述べる．

2. 修理限界取替え問題

文献 [2] で論議された確率的保全問題について述べる．1 ユニットシステムにおいて，スペアユニットはリードタイムを伴う発注によってのみ供給され，故障ユニットは修理可能とする．動作ユニットは時刻 0 で動作を開始し，計画期間は無限大とする．動作ユニットが故障すると直ちに修理が開始される．その結果，もし修理が前もって定められた修理時間限界 $t_0 \in [0, \infty)$ 以内に完了するならば，修理されたユニットは直ちに動作を開始する．修理完了後のユニットは新品同様とする．

他方，もし修理が修理時間限界 t_0 経過した時点で完了していないならば，故障ユニットは廃棄され，直ちに新しいスペアユニットが発注される．そして，リードタイム $L\ (\geq 0)$ 経過後スペアは納入され，システムは直ちに動作を再開する．動作開始から次の動作が開始されるまでを 1 サイクルとし，以後同様なサイクルを繰り返す．

費用パラメータとして，次のような記号を定義する．

$k_r\ (>0)$: 単位時間当たりの故障ユニットの修理費用

$k_f\ (>0)$: 単位時間当たりのユニットの品切れ費用

$c\ (>0)$: 1 回当たりのスペアユニットの発注費用

ここで，単位時間当たりの修理費用は単位時間当たりの発注費用より小さい，すなわち，$0 \leq k_r L < c$ を仮定する．

これより，1 サイクル中に生じる総期待費用は

$$E_C(t_0) = (k_r + k_f) \int_0^{t_0} \overline{G}(t)dt + (k_f L + c)\, \overline{G}(t_0) \tag{1}$$

となる．ここで，$G(t)$ は故障ユニットの修理完了時間の累積分布関数であり，$\overline{G}(\cdot) = 1 - G(\cdot)$ である．また，1 サイクルの平均時間は

$$E_T(t_0) = m_f + \int_0^{t_0} \overline{G}(t)dt + L\overline{G}(t_0) \tag{2}$$

となる．ここで，$m_f\ (>0)$ はユニットの平均寿命である．

よって問題は，定常状態における単位時間当たりの期待費用 $C(t_0) = E_C(t_0)/E_T(t_0)$ を最小にする最適修理時間限界 t_0^* を求めることである．文献 [2] の結果より，この問題は以下の最小化問題と等価となる．

$$\min_{0 \leq p \leq 1} \frac{-\frac{k_f L + c}{k_r L - c} \cdot \frac{m_f}{m_r} + \psi(p)}{-\{1 + \frac{(k_r + k_f) m_f}{k_r L - c}\} + p}. \tag{3}$$

ここで，$m_r\ (>0)$ は平均修理完了時間，

$$\psi(p) \equiv \frac{1}{m_r} \int_0^{G^{-1}(p)} \overline{G}(t)dt, \quad 0 \leq p \leq 1 \tag{4}$$

は修理完了時間分布の標準 TTT 変換，$G^{-1}(p) = \inf\{t : G(t) \geq p\}$ である．

いま，未知の修理完了時間分布 $G(\cdot)$ からの $n+1\ (>0)$ 個のサンプル（完全データ）に対する順序統計量 $0 = s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$ が与えられているとすれば，$G(\cdot)$ に対する経験分布および標準 TTT 統計量は

$$G_n(x) = \begin{cases} \dfrac{i}{n} & \text{for} \quad x_{i-1} \leq x < x_i, \\ 1 & \text{for} \quad x_n \leq x, \end{cases} \tag{5}$$

$$\psi_{in} \equiv \frac{\sum_{j=1}^{i} (n-j+1)(s_j - s_{j-1})}{\sum_{j=1}^{n} (n-j+1)(s_j - s_{j-1})}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

となる．これより，$(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ 平面上に $(i/n,\psi_{in})$, $i=0,1,2,\cdots,n$ をプロットし，それらを線分でつなぐことによって標準 TTT プロットを得る．よって，最適修理時間限界の推定量は，式 (3) の問題において，$p\to i/n$ ならびに $\psi(p)\to\psi_{in}$ と置き換えることによって求められる．

3. スプライン近似

スプライン関数 $z(x)$ は，多項式を何らかの連続条件を満たすように近似するための連続した区分的多項式である．スプライン関数の節点間において関数 $z(x)$ が m 次以下の多項式であり，C^{m-1} 級の関数であるならば，m 次スプライン関数であるという．また，節点 ξ_j, $j=1,2,\cdots,$ を持つ $2k-1$ 次（$k=1,2,\cdots,$ 奇数次）のスプライン関数が二つの区間 $(-\infty,\xi_1]$ と $[\xi_n,\infty)$ において $k-1$ 次の多項式で表されるとき，このスプライン関数は N-スプライン関数とよばれる．関数近似の精度と計算量の問題を考慮すると，通常，3 次 N-スプライン関数 (natural cubic Spline function) が使われる．

いま，与えられた $n+1$ 個の点列 $(x_i,\ y_i)=(i/n,\psi_{in})$, $i=0,1,\cdots,n$, を通る以下のような区分的 3 次多項式 $z(t)$ を考える．

$$z_i(t) = \frac{(x_{i+1}-t)^3}{6h_i}M_i+\frac{(t-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1} + A_i(x_{i+1}-t)+A_{i+1}(t-x_i). \tag{7}$$

ここで，

$$A_i = \frac{y_i}{h_i}-\frac{h_i}{6}M_i, \tag{8}$$

$$h_i=x_{i+1}-x_i,\quad i=0,1,\cdots,n-1 \tag{9}$$

であり，スプライン係数 M_i, $i=0,1,\cdots,n$, は以下の方程式を満足する．

$$\frac{1}{4}M_{i-1}+M_i+\frac{1}{4}M_{i+1}=\frac{3(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1})}{2h_i^2}, \tag{10}$$

$$M_0+\frac{1}{2}M_1=\frac{3}{h_i}\left(\frac{y_1-y_0}{h_i}\right), \tag{11}$$

$$M_{n-1}=\frac{y_n-2y_{n-1}+y_{n-2}}{h_i^2},\quad i=1,2,\cdots,n-1. \tag{12}$$

この方程式は，補間を行う点列 $(x_i,\ y_i)$, $i=0,1,\cdots,n$, を用いた 3 重対角方程式を解くことによって得られる．つまり，各区間におけるスプライン係数を決定することにより，3 次 N-スプライン関数を生成することができる．以下に，スプライン関数を用いた修理限界問題の近似解法を示す．

STEP 1: n 個の修理時間データの順序統計量から，標準 TTT プロット $(i/n,\ \psi_{in})$, $i=0,1,\cdots,n$, を求める．

STEP 2: 式 (10)-(12) からスプライン係数 M_i を推定し，区分的な 3 次スプライン曲線 $z_i(x)$ によって標準 TTT プロットを補間する．

STEP 3: 式 (3) より，点 $(x,y)=(1+[k_r+k_f]m_f/[k_rL-c],[k_fL+c][k_rL-c]/[m_f/m_r])$ と **STEP 2** で求められた近似曲線を結んだ直線の中から最小の傾きを与える点 p^* $(0\le p^*\le 1)$ を求める．

STEP 4: 式 (5) の経験分布 $G_n(x)$ を N-スプライン関数で近似し，得られた曲線 $AG(x)$ の逆変換を行うことによって最適修理時間限界の推定値 $t_0{}^*=AG^{-1}(p^*)$ を求める．

表 1 は，従来の標準 TTT プロットとスプライン近似によって推定された最小期待費用に対する平均二乗誤差を比較したものである．ここで，修理時間データは形状パラメータ 1.5, 尺度パラメータ 0.6 のワイブル乱数によって生成し，他のモデルパラメータは $m_f=0.8$, $L=0.2$, $c=6.0$, $k_r=3.0$, $k_f=5.0$ である．表の結果から，スプライン近似に基づいた改良法の精度は従来法よりもかなり高いことがわかる．

表 1: Comparison of the minimum expected costs.

No. of Data	Spline	TTT
5	0.711362	0.711362
10	0.652048	0.652048
15	0.678579	1.472546
20	0.678579	1.472546
25	0.894121	0.894121
30	0.126263	0.126263
35	0.292141	0.349452
40	0.023012	0.023012
45	0.126263	0.126263
50	0.126263	0.126263

参考文献

[1] Barlow, R. E. and Campo, R., "Total time on test processes and applications to failure data analysis", in *Reliability and Fault Tree Analysis*, (R. E. Barlow, J. Fussell and N. D. Singpurwalla, eds.), 451-481, SIAM, Philadelphia, (1975).

[2] Koshimae, H., Dohi, T., Kaio, N. and Osaki, S., "Graphical/statistical approach to repair limit replacement problem", *Journal of Operations Research Society of Japan*, vol. 39, 230-246, (1996).

[3] Dohi, T., Matsushima, N., Kaio, N. and Osaki, S., "Nonparametric repair-limit replacement policies with imperfect repair", *European Journal of Operational Research*, vol. 96, 260-273, (1996).

[4] 桜井明,「スプライン関数入門」, 東京電機大学出版局 (1993).