1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ネットワーク信頼度計算におけるネットワーク分割

02102204 大阪大学 *小出 武 KOIDE Takeshi
01205144 鹿児島大学 新森 修一 SHINMORI Shuichi
01005195 大阪大学 石井 博昭 ISHII Hiroaki

1 はじめに

ネットワークシステムの信頼度を測る尺度の一つである総合信頼度 (all-terminal reliability) とは、確率グラフ中の全ての点が正常に機能している枝によって連結されている確率である。一般に、総合信頼度の値を求めるのに要する計算時間は枝の本数に対し指数的に増加する（*NP*-困難）ので、精度の良い境界値、特に下界を多項式時間で求めることが重要になる ([1]) 。

我々はエッジパッキングを用いる総合信頼度の下界導出法を提案してきた ([2][3][4])。これらの方法は従来の方法とは異なり、正常に機能する確率が各枝について必ずしも同一でないネットワークに対しても適用可能であるという利点を持つ。しかし点と枝について疎な部分と密な部分を持った形状のネットワーク（以下疎密なネットワーク）にこれらの方法を適用した場合、一般の形状のネットワークに対して適用した場合と比較してあまり良い精度を示すことができなかった。本稿では上記形状のネットワークについても精度の良い結果を導出するようなネットワーク分割方法について考察する。

2 モデルの設定

要素数 n の点集合 $\{v_1, \cdots, v_n\}$、要素数 m の枝集合 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ からなる無向グラフを $G = (V, E)$ とする。グラフ中の各枝は正常に機能している状態（正常状態）と故障している状態（故障状態）の２つの状態があり、枝 $e \in E$が正常である確率（枝正常確率）を p_eとし、各枝の枝正常確率は互いに独立とする。また点は常に正常であると仮定する。このような確率グラフ G 中の全ての点が正常な枝によって連結になるとき、G で表現されるネットワークは正常であるという。ネットワークが正常である確率を総合信頼度（all-terminal reliability：全点信頼度とも言う）と呼び、$Rel(G)$ で表す ([1])。

3 エッジパッキングによる $Rel(G)$ の下界

定義 1 グラフ $G = (V, E)$ に対し、全ての点を有する互いに枝排反な部分グラフの集合

$$\{G_i | G_i = (V, E_i),\ E_i \subset E,\ E_i \cap E_j = \phi (i \neq j)\}$$

をエッジパッキング（*edge-packing*）という。

定理 1 グラフ $G = (V, E)$ が要素数 kのエッジパッキング $\{G_1, \cdots, G_k\}$ をもつとき、次の不等式が成立する [1]。

$$Rel(G) \geq 1 - \prod_{i=1}^{k} (1 - Rel(G_i)) \quad (1)$$

G_iが非連結の場合は明らかに $Rel(G_i) = 0$ になるため、エッジパッキングの要素が全点と連結でない場合、下界に対し何の寄与も行わないことがわかる。

以下各要素が $G = (V, E)$ の極大木であるエッジパッキングを考える。G が K_4の場合、エッジパッキングの要素（互いに枝排反な極大木の数）２とすることが可能で、この場合全ての枝をエッジパッキングの要素として利用している。一方、２つの K_4を１本の枝で連結したグラフ（図１）に対しては、エッジパッキングの要素は高々1にしかならず、各 K_4中の３本の枝（合計６本）はエッジパッキングの要素として利用されない。一般の疎密ネットワークに対しても同様に、疎の部分が存在するために、密の部分中にある枝を有効に利用できず、得られる下界の精度が悪くなる傾向がある。

4 ネットワークの分割

定義 2 グラフ $G = (V, E)$ の部分グラフのうち、切断点を持たない極大な部分グラフを G のブロックという。

総合信頼度の定義から以下の定理が成立する。

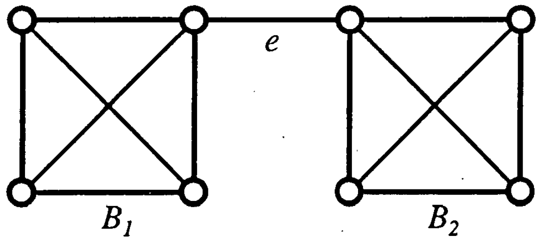

図 1: 疎密ネットワークの例

定理 2 グラフ $G=(V,E)$ が 2 つのブロック B_1, B_2 に分けられるとき、次の式が成立する [証明略]。

(2) $$Rel(G) = Rel(B_1)Rel(B_2)$$

例えば図 1のグラフは 3 つのブロックに分けられるので、

$$Rel(G) = p_e Rel(B_1)Rel(B_2)$$

となる。この分割を行えば、分割後の各グラフは分離不可能なグラフになる。また分割後のグラフについて、総合信頼度の値ではなく、その下界値を求めた場合は明らかに、

(3) $$Rel(G) \geq Lower(B_1)Lower(B_2)$$

ここで $Lower(G)$ は $Rel(G)$ の下界を表す。

グラフのカットセットを考えた場合、以下の定理が成立する。

定理 3 グラフ $G=(V,E)$ が大きさ h のカットセット $\{e_1,\cdots,e_h\}$ により G_1, G_2に分割されるとき、次の式が成立する [証明略]。

(4) $$Rel(G) \geq (1-\prod_{i=1}^{h}(1-p_{e_i}))Rel(G_1)Rel(G_2)$$

(4) 式を用いれば、G_1, G_2の総合信頼度（またはその下界）を求めることにより、G の下界を得られることがわかる。

5 アルゴリズム

グラフ G に [2] で提案した短絡除去、直列縮退、並列縮退（以下総称として 3 変換と呼ぶ）を繰り返し適用すれば、平行枝がなく、全ての点の次数が 3 以上である確率的に等価なグラフに変換することができる。この変換と上記ネットワーク分割を用いて総合信頼度の下界を導出するアルゴリズムの概略を以下に示す。

1. $G \leftarrow G$ に 3 変換を可能な限り適用したグラフ;
2. $B_1,\cdots B_l \leftarrow G$ のブロック;
3. $i=1,\cdots,l$の各ブロックについて、
Step.4～6 を実行;
4. $C \leftarrow B_i$の最小カットの 1 つ;
5. $G_1, G_2 \leftarrow C$を除去して得られるグラフ;
6. $Lower(B_i) \leftarrow$(4) 式により得られる B_iの下界;
7. (3) 式により、$Lower(G)$ を計算;

紙面の都合上、アルゴリズムの詳細、計算オーダー、計算結果等については、当日発表する。

6 まとめ

本稿では総合信頼度の計算において有効なネットワーク分割について考察した。従来我々が提案した総合信頼度の下界を求めるアルゴリズムは、疎密なネットワークに対してあまり精度の良い下界を導出することができなかったが、ネットワーク分割を併用することによって精度の良い下界を求めることができる。

参考文献

[1] Colbourn, C.J., Combinatorics of Network Reliability, Oxford University Press, New York, 1987.

[2] 新森, 小出, 石井, エッジ・パッキングによるネットワーク信頼度の下界, 日本応用数理学会論文誌, 5(2) 139-151(1995)

[3] Koide,T, Shinmori,S, Ishii, H, Lower bounds of all-terminal reliability by packing and graph transformations, to be submitted.

[4] 小出, 新森, 石井, 直並列グラフを利用した all-terminal reliability の下界, 日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集, 256-257(1997)