1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ネットワーク上の移動目標に対する期待利得尺度の最適捜索

02302270　防衛大学校　*寺本昌義　TERAMOTO　Masayoshi
01504810　防衛大学校　宝崎隆祐　HOHZAKI　Ryusuke
01000890　防衛大学校　飯田耕司　IIDA　Koji

1　はじめに

移動目標の位置の分布が時間の関数で表される場合の移動目標捜索問題は，捜索者と目標との間の一方的／双方的捜索を問わず Stone[1]等の多数の研究がある．しかし，移動目標の位置情報が経路のみで表され，時間情報がない場合の研究は，ネットワーク上の移動目標に対する双方的捜索を扱った Washburn and Wood [2]ほか数件が散見されるのみである．本研究では，目標経路が位置情報のみで表される場合のネットワーク上の移動目標に対する捜索者の最適捜索努力配分を求める．また，評価尺度として，探知確率を包含する期待利得を用いた．この問題は捜索問題における資源配分問題とみなせるが，これに対する最適解の必要十分条件を求め，この条件を用いることによって，勾配射影法や乗数法といった汎用的な非線形計画法のアルゴリズムよりも効率のよい解法アルゴリズムを提案することが本研究の目的である．

2　モデルの前提及び問題の定式化

（1）捜索空間はノードの集合 V とアークの集合 E を持つネットワーク $G=(V,E)$である．ノードはi=1,…,mで，アークはk=1,…,nで番号付けされている．

（2）目標は G 上に始点ノード s から終点ノード t へ到るいくつかの閉路ではない経路のうちの１つを選択して移動する．経路 l を，その上を目標が移動するアークの順番で$l=\{\, l(1),\cdots,l(n_l)\,\}$と表し，目標が選択し得る経路全体の集合を$L$で表す．目標が経路 l を選ぶ確率は$0 \le \pi(l) \le 1$と推定され，$\sum_{l\in L}\pi(l)=1$を仮定する．

（3）捜索者はネットワーク上のアークに捜索努力量を配分して目標を待ち受け，探知に努める．捜索努力量の総量はMであり，それを任意に分割してアークに配分できる．アークkに配分する捜索努力量をφ_kで表し，捜索者の捜索計画を$\varphi=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$で表す．

（4）アークkに配分した捜索努力量φ_kにより，ここを通る目標が探知される確率p_kは，φ_kの単調増加関数$p_k=1-\exp(-\alpha_k\varphi_k)$で表されると仮定する．ただし，$\alpha_k>0$である．また，アーク$k$で目標を探知したとき，捜索者は価値$V_k$を得るが，$V_{l(i)} \ge V_{l(i+1)}$，$i=1,\cdots,n_l-1$，$l\in L$を仮定する．アーク k での単位捜索努力量当りの捜索コストはC_kであるとする．

（5）捜索者は，獲得する価値から捜索コストを引いた値の期待値で定義される期待利得を最大にすることを目的とする．

以上より，捜索計画φにより捜索者が得る期待利得$R(\varphi)$は，次式で与えられる．

$$R(\varphi)=\sum_{l\in L}\pi(l)\sum_{i=1}^{n_\ell}\left[V_{l(i)}\exp\left(-\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{l(j)}\varphi_{l(j)}\right)\times\left\{1-\exp\left(-\alpha_{l(i)}\varphi_{l(i)}\right)\right\}\right]-\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k \quad (1)$$

この目的関数は凹関数となり，問題は次の凹計画問題となる．

$$\mathbf{P0}:\max_{\varphi}\ R(\varphi) \quad (2)$$

$$\text{subject to}\quad \sum\nolimits_{k=1}^{n}\varphi_k \le M\,, \quad (3)$$

$$\varphi_k \ge 0,\quad k=1,\cdots,n\,. \quad (4)$$

3　最適捜索計画の必要十分条件

式(3)と(4)を満たす許容解の全てを次式で表すと，最適捜索計画の必要十分条件は以下の定理１で与えられる．

$$\Phi=\left\{\varphi \,\middle|\, \sum\nolimits_{k=1}^{n}\varphi_k \le M\,,\ \varphi_k \ge 0,\ k=1,\cdots,n\right\}. \quad (5)$$

定理１　問題**P0**において，捜索計画$\varphi\in\Phi$が最適であるための必要十分条件は，ある非負のμが存在し，全ての$k=1,\cdots,n$について以下の式が成立つことである．ただし$\delta_{k\cdot l(i)}$はクロネッカーデルタの記号である．

$\varphi_k>(=)0$ならば，

$$A_k(\varphi)\exp(-\alpha_k\varphi_k)-C_k=(\le)\,\mu \text{ (複号同順)}, \quad (6)$$

かつ，

$\mu > 0$ ならば, $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k = M$. (7)

ただし,

$$A_k(\varphi) = \alpha_k \sum_{l \in L} \pi(l) \sum_{i=1}^{n_l} \delta_{k \cdot l(i)}$$

$$\times \exp\left(-\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{l(j)} \varphi_{l(j)} \right) \left\{ V_{l(n_l)} \exp\left(-\sum_{j=i+1}^{n_l} \alpha_{l(j)} \varphi_{l(j)} \right) \right.$$

$$\left. + \sum_{\zeta=i}^{n_l - 1} \left(V_{l(\zeta)} - V_{l(\zeta+1)} \right) \exp\left(-\sum_{j=i+1}^{\zeta} \alpha_{l(j)} \varphi_{l(j)} \right) \right\} . \quad (8)$$

4 最適捜索計画の数値解法

$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k = M$ となり, 捜索努力量を上限 M まで使いきる配分を全量捜索と呼び, $\sum_{k=1}^{n} \varphi_k < M$ の場合を部分量捜索と呼ぶ. 定理1に基づいて最適捜索計画を求めるアルゴリズムを以下に示す.

計算アルゴリズム A0 :

ステップ1 : 初期許容解 $\varphi^i = \mathbf{0}$, $i = 1$ とおく.

ステップ2 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k} \left[\log\left(\frac{A_k(\varphi^i)}{\mu^{i+1} + C_k} \right) \right]^+ = M \quad (7)$$

を満たす μ^{i+1} を導出する. ただし,

$$[z]^+ = \max\{0, z\} . \quad (8)$$

ステップ3 : $\mu^{i+1} > 0$ ならば全量捜索とし, そうでなければ部分量捜索として $\mu^{i+1} = 0$ とおく. 全量捜索, 部分量捜索ともに次式により ψ^{i+1} を求める.

$$\psi_k^{i+1} = \frac{1}{\alpha_k} \left[\log\left(\frac{A_k(\varphi^i)}{\mu^{i+1} + C_k} \right) \right]^+ , \ k = 1, \cdots, n. \quad (9)$$

ステップ4 : $R(\psi^{i+1}) > R(\varphi^i)$ ならば $\varphi^{i+1} = \psi^{i+1}$ とする. そうでなければ,

$$R(\phi^*) = \max_{\phi} \left\{ R(\phi) \,\middle|\, \phi = \varphi^i + \theta(\psi^{i+1} - \varphi^i) , \right.$$

$\left. 0 \le \theta \le 1 \right\}$ となる ϕ^* を求め, $\varphi^{i+1} = \phi^*$ とする.

ステップ5 : $\sum_{k=1}^{n} \left| \varphi_k^{i+1} - \varphi_k^i \right| < \varepsilon$ (ε は微小正数) ならば, φ^{i+1} は最適解となりアルゴリズムを終了する. そうでなければ $i = i + 1$ としてステップ2へ行く.

なお, このアルゴリズム **A0** により, $\{\varphi^i\}$ が $R(\varphi^i) < R(\varphi^{i+1})$ となるように目的関数の単調増加列を生成しながら最適解に収束することが証明できる.

5 数値例

本節では, アルゴリズム **A0** と非線形計画法の代表的数値解法である勾配射影法及び乗数法による計算時間を比較する. 作成したネットワークはランダムなグラフにランダムなシステム・パラメータを付与したもので, 合計1000個の問題を作成し, これらの問題を各計算法で解いた. ただし, どの問題においても M=5, $|L|$=5 としたが, 問題のサイズ(n, m)としては3種類を対象とした. アーク n 及びノード m の平均数と各計算法による計算時間の平均値を表1に示す. なお, 計算機はDEC3000を使用し, プログラム言語はC言語を用いた.

表1を見ると, 計算時間はアルゴリズム **A0**, 勾配射影法, 乗数法の順序で短く, 問題のサイズの増大に対する計算時間の増加率もこの順序で小さい. 以上から, この数値実験に関しては提案したアルゴリズム **A0** の高速性が言え, 問題のサイズが大きくなればなるほど計算時間におけるアルゴリズム **A0** の優位性が増すことが予想される.

表1 計算法の計算時間の比較

問題のサイズ		計算時間 (秒)		
アークの平均数	ノードの平均数	アルゴリズム **A0**	勾配射影法	乗数法
25.9	18.6	0.5886	5.651	54.06
38.8	27.2	0.8058	15.52	186.5
51.9	39.4	1.082	28.62	448.1

6 おわりに

本研究ではネットワーク上の経路移動型目標に対する期待利得尺度の最適捜索問題に関して, 最適解の必要十分条件を明らかにし, それに基づく計算アルゴリズムを提案した. また, この計算アルゴリズムが他の汎用的な計算法 (勾配射影法, 乗数法) と比較して十分高速であることを確認した.

参考文献

[1] Stone, L.D., "Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Search Plans for Moving Targets," *Mathematics of Operations Research*, 4, pp.431-440, 1979.

[2] Washburn, A. and Wood, K., "Two-Person Zero-Sum Games for Network Interdiction," *Operations Research*, 43, pp.243-251, 1995.