1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

必要不可欠でない需要に対する競合施設配置問題

大阪大学 ＊粕谷 博宣 KASUYA Hironobu
01204084 神戸学院大学 塩出 省吾 SHIODE Shogo
01005194 大阪大学 石井 博昭 ISHII Hiroaki
01003734 神戸芸術工科大学 大角 盛広 OSUMI Shigehiro

1 はじめに

競合する施設の配置問題は Hotelling[1] によって最初に研究され、その後様々な研究者によって研究されてきた。これまで扱われてきたほとんどの問題では、需要点から最も距離の近い施設がすべての需要を獲得すると仮定している。ところが、実際のモデルにおいて、需要が利用者によって全て満たされるとは限らない。例えばレストランなどの配置を考えるにあたっては、施設と利用者の距離が遠くなると、その施設を利用する客の数は減少すると考えるのが自然である。今までこのような需要に対する問題はあまり研究されていない。そこで、ここでは、必要不可欠でない需要に対する競合施設配置問題に対して、Drezner[2] によって提案されたメジアノイド問題、と、セントロイド問題について考える。

2 定式化

直線上に n 個の需要点 A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ が存在し、それらの座標を a_i、重み (需要量) を w_iとする。また、競合する施設は X,Yとし、それぞれの座標を x,yとする。また、各施設は需要点からの距離が近い方が需要を獲得する権利があとし、施設が獲得しうる需要の割合は、施設からの距離に関して線形的に減少するものとし、次のような関数で表されるとする。

$$f_i(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x-a_i|}{d_0} & (|x-a_i|\le d_0)\\ 0 & (|x-a_i|>d_0)\end{cases}$$

すなわち、その需要を獲得できる距離の範囲は d_0である。ここで、需要点が２つの施設の中点に位置する場合は、両施設に等しく分けられるものとする。したがって、Xが定まっているときの Yの購買力 $W(y\,|\,x)$ は、

$$W(y\,|\,x)=\sum_{y_i<x_i}f_i(y)w_i+\frac{1}{2}\sum_{y_i=x_i}f_i(y)w_i$$
$$\text{ただし } x_i=|x-a_i|,\ y_i=|y-a_i|$$

と表される。

3 解法

3.1 メジアノイド問題の解法

メジアノイド問題とは、施設 Xの位置 x が与えられたときに、Yの購買力 $W(y\,|\,x)$ を最大にする yを決定することである。すなわち、
[メジアノイド問題 MP]

$$W(y\,|\,x)=\sum_{y_i<x_i}f_i(y)w_i+\frac{1}{2}\sum_{y_i=a_i}f_i(y)w_i \longrightarrow \max$$

となる yを見つけることである。

実際に Yの最適配置を求めるにあたって、Xと Yの支配領域の境界点、限界点と需要点の位置関係によって Yの配置政策は大きく変化するので、パターンに分類し詳しく調べる必要がある。

分類したパターンは次のとおりである。

I. 需要点上に Yが存在しないとき

(1) $x+d_0 \leq y$ のとき

(2) $x+2d_0 > y\,,\ \dfrac{x+y}{2} \neq a_s$
($^\forall s \in \{1\,,2\,,\ldots\,,n\}$) のとき

(3) $x+2d_0 > y\,,\ \dfrac{x+y}{2} = a_s$ のとき

II. 需要点上に Y が存在するとき

(4) $x+2d_0 \leq y$ のとき

(5) $x+2d_0 > y\,,\ \dfrac{x+y}{2} \neq a_s$
($^\forall s \in \{1\,,2\,,\ldots\,,n\}$) のとき

(6) $x+2d_0 > y\,,\ \dfrac{x+y}{2} = a_s$ のとき

以上のパターンを調べたとき、最適解は(3),(4),(5),(6)のときに、ある条件の下で存在することが分かった。

3.2 セントロイド問題の解法

セントロイド問題とは、ある X の位置 x に対するメジアノイド問題の解を解 $y^*(x)$ としたとき、最大の $W(x\,|\,y^*(x))$ を与える x 求めることである。すなわち、
[セントロイド問題 CP]

$$W(x\,|\,y(x)) = \sum_{x_i<y_i} f_i(x)w_i + \frac{1}{2}\sum_{x_i=y_i} f_i(x)w_i \longrightarrow \max$$

となる x を求めることである。このとき、
[定理 1]
セントロイド問題の最適解は需要点上に存在する。

この定理から、X は各需要点上を探索していけばよいことが分かる。さらに探索する需要点の数を減らすことを考えて、次にアルゴリズムを示す。
[アルゴリズム]

1. 与えられた問題に対し、全ての需要点上における施設 X の購買力 $W(x)$ を求め、購買力を最大にする需要点から順に $M_1\,,M_2\,,\ldots\,,M_n$ とラベルをつける。
2. M_1 における購買力を W_{M_1} とし、$\frac{1}{2}W_{M_1}$ を $W(x)$ の下限値とし、W_XL で表す。
3. W_XL を越える需要点におけるラベルが存在すれば4に進む。もしなければ終了する。
4. X が M_1 にあるとき $W(y\,|\,x)$ が最大となる場所を調べる。
5. $|x-y| \geq 2d_0$ において $W(y\,|\,x)$ が最大となるとき、このときの x がセントロイド問題の解となる。逆に、$|x-y| < 2d_0$ において $W(y\,|\,x)$ が最大となるとき、このときの Y の位置 y^* に対する $W(x\,|\,y^*)$ を求め、W_L より小さいとき、このときの x がセントロイド問題の解となる。逆に、大きいとき、このときの $W(x\,|\,y^*)$ を下限値とし、W_XL を書きかえる。3に戻る。

このアルゴリズムによって、最適解はすべての需要点上を調べる必要がなく、毎繰り返しで更新される下限値と比べることによって調べる点を減少させることができる。

4 おわりに

本研究で、必ずしも必要とは限らない需要を競合施設配置問題に取り入れた研究を行った。本研究は、ネットワーク上の場合にも拡張されるであろう。また、Nash 均衡解の存在の有無を調べると更に興味深い研究となるとなるであろう。本研究の解法に関してはまだ決して効率的なものとはいえず、もう少し最適解の候補点を削除する必要がある。これらの点も含め、また、平面上への拡張も現在検討中である。

参考文献

[1] H.Hotelling: "Stability in Competition", *The Economic Journal*, **30** (1929), 41-57.

[2] Z.Drezner: "Competitive Location Strategies for Two Facilities", *Regional Science and Urban Economics*, **12** (1982), 485-493.