1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ファジィランダムコストをもつ ボトルネック型スパニングツリー問題

02102914　大阪大学　*片桐　英樹　KATAGIRI Hideki
01005194　大阪大学　石井　博昭　ISHII Hiroaki

1　はじめに

ネットワークにおける応用上重要な問題の一つとしてスパニングツリー問題がある。通常のスパニングツリー問題は重みの和を最小にする問題でミニマム・スパニングツリー問題と呼ばれる。一方、スパニングツリーの重みの最大値を最小にする問題はボトルネック・スパニングツリー問題と呼ばれ、重みが確率変数で与えられている場合については、H.Ishii[4]によって研究されている。しかし、現実には重みがランダム性だけでなく、曖昧さも含んでいる場合も多いと思われる。本研究では、このような確率とファジィの両性質をあわせもつ要素をファジィランダム変数で表し、確率計画法における機会制約条件計画問題として定式化する。すなわち、目的関数に対するファジィ目標を設定し、その可能性測度と確率測度を共に最大化するようなスパニングツリーを求める方法を提案する。

2　ファジィランダム変数

ファジィランダム変数はKwakernaakによって導入され[1]、その後、Puri と Ralescuは別の定義を与えると共に理論的な土台を構築した[2]。定義には様々なものがあるが、N.Watanabeは包括的な定義をファジイランダム変数になるための十分条件の形で与えた[3]。本研究ではこの定義を用いることにする。

定義 1 [3]
Ω を標本空間、Λをファジィ集合、B_Ω, B_Λ を $\sigma-$集合体、P を確率測度とする。さらに(Ω, B_Ω, P), (Λ, B_Λ)をそれぞれ確率空間、可測空間とするとき、ΩからΛへの可測写像Xをファジイランダム変数という。

定義2.1の十分条件にあたる定理から次の補題が導かれる[3]。

補題 2 [3]
X をΩ からΛへの写像とする。$\forall\omega \in \Omega$に対して，ファジイ集合$X(\Omega)$のメンバーシップ関数 $\mu_{X(\omega)}$ があるe関数$f(u;\theta)$に対して$\mu_{X(\Omega)}(u) = f(u; x(\omega))$ と表されるとする。ここでθに関して $\theta_1 \neq \theta_2$ のとき $f(u;\theta_1) \neq f(u;\theta_2)$が成り立つならば$X$ はファジイランダム変数である。

3　定式化

$G = (N, E)$を 点集合$N = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$と枝集合$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subset N \times N$からなる無向グラフとし、$e_j$には重み$c_j$が設定されているものとする。Gにおけるスパニングツリー$T = T(N, S)$ は$S \subseteq E$かつ閉路を含まない連結部分グラフである。

Tは次のように$0-1$変数の$x_1, x_2, \ldots, x_m$で表すことができる。

$$
\begin{aligned}
T \ : \quad & x_i = 1 \quad e_i \in S \\
& x_i = 0 \quad e_i \notin S
\end{aligned}
$$

いくつかの都市を結ぶ通信網の建設をする場合を考える。それぞれの都市間の単位時間あたりの各々の通信量が一定のとき、扱う必要のある通信量の最大の容量を最小化する問題、すなわち$\max\{c_j | x_j = 1\}$を最小にするTを求める問題が生じる。そのような問題はボトルネック・スパニングツリー問題と呼ばれている。通信量が時間に伴って確率的に変動するようなより現実的と思われる場合の意思決定法、及び解法についてはH.Ishii, et al.によって示されている[4][5]。しかし実際には、熟練者によって「ある確率でだいたいこのぐらい」というような情報が与えられる場合もあると考えられる。本稿ではそのようなファジィ性とランダム性をあわせもつ要素をファジィランダム変数で表し、その状況下での意思決定法を提案する。すなわち[4]のファジィランダム版を考える。

c_jを次のようなメンバーシップ関数で制限されるファジィランダム変数と仮定する。

$$\mu_{C_i(\omega)}(c_i) = \max\left\{0,\ L\left(\frac{c_i - d_i(\omega)}{\beta_i}\right)\right\}$$

1. $L(x) = L(-x)\ \ \forall x \in \mathbf{R}$
2. $L(x) = 1\ iff\ x = 0$
3. Lは$[0,\ +\infty)$上で単調非増加
4. $t_0 = \inf\{t > 0 | L(t) = 0\}$ このとき、$0 < t_0 < +\infty$

β_iは正定数で、それぞれの$d_i(\omega)$は平均μ_i、分散σ_i^2をもつ正規分布$N(\mu_i,\ \sigma_i^2)$に従う互いに独立な確率変数とする。$\mu_{C_i(\omega)}$は補題2の条件を満たしている。

求めるスパニングツリーに対し"c_iがだいたいf_1以下である"というファジィ目標を設け、その可能性測度を次のように与える。

$$\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(G) = \sup_{c_i} \min\{\mu_{C_i(\omega)}(c_i),\ \mu_G(c_i)\}$$

μ_G は非減少上半連続関数である。$\mu_{C_i(\omega)}$は$d_i(\omega)$に伴って確率変数となるため$\mathcal{P}_{C_i(\omega)}(G)$も確率変数となる。

ここでこの問題の意思決定法として次のようなP_0を提案する。この問題は、各々の通信量に対するファジィ目標の可能性測度がある値以上である確率がある満足レベル以上であるような条件の下で、その可能性測度と確率測度を同時に最大化する問題である。

$$\begin{aligned}
&P_0 : \\
&Maximize \quad h + g(\alpha) \\
&subject\ to \quad Pr[\min\{\mathcal{P}_{C_i}(c_i) | e_i \in T\} \ge h] \ge \alpha \\
&\qquad\qquad\quad T :\ spanning\ tree
\end{aligned}$$

ここでgは単調増加関数であり、確率レベルαは$\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$とする。以下では$L(\cdot), \mu_G(\cdot)$を共に次のような線形関数とする。

$$\begin{aligned}
L(t) &= 1 - \left|\frac{t}{t_0}\right| \\
\mu_G(c_i) &= \begin{cases} 1 & (c_i \le f_1) \\ \dfrac{c_i - f_1}{f_0 - f_1} & (f_1 < c_i < f_0) \\ 0 & (c_i \ge f_0) \end{cases}
\end{aligned}$$

P_0の確率制約条件を等価確定条件に変形し両辺の対数をとると次のP_1となる。

$$\begin{aligned}
&P_1 : \\
&Maximize \quad h + g(\alpha) \\
&subject\ to \\
&\sum_{i=1}^{m} \log F\left(\frac{h(f_1 - f_0 - \beta_i t_0) + \beta_i t_0 + f_0 - \mu_i}{\sigma_i}\right) x_i \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ge \log \alpha \\
&\qquad 1 \ge \alpha \ge \frac{1}{2} \\
&\qquad x_i = 0\ or\ 1,\ i = 1, 2, \ldots, m, \\
&\qquad X = (x_i) : spanning\ tree.
\end{aligned}$$

ここで、$F(\cdot)$は標準正規分布$N(0,\ 1)$の分布関数である。

4 おわりに

詳細及びP_1の解法については当日の発表で述べる予定である。

参考文献

[1] H.Kwakernaak, "Fuzzy random variable-1. Definitions and theorems", *Information Sciences* **15**(1978) 1-29

[2] M.L.Puri and D.A.Ralescu, "Fuzzy random variables", *Journal of Mathmatical Analysis & Application.* **114**(1986) 409-422

[3] N.Watanabe, "Fuzzy Random Variables and Statistical Inference ", 日本ファジイ学会誌 **8**(1996) 126-135.

[4] H.Ishii and S.Shiode, "Chance constrained bottleneck spanning tree problem", *Annals of Operations Research* **56**(1995) 177-187

[5] H.Ishii and T.Nishida, "Stochastic bottleneck spanning tree problem", *Networks* **13**(1983) 443-449