1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

集線装置配置問題に対する整数計画モデル

01205890 （財）電力中央研究所 情報研究所　椎名 孝之　SHIINA Takayuki

1　背景と目的―集線装置配置問題

コンピューターネットワークの目標は、ネットワークを成す各情報システム間の結合を自由に行うことにある。そのため、ネットワークの提供者側からは、効率の良い高速度の情報伝送能力を持つネットワークを構築する技術の開発が重要である。本稿では、既知の需要要求を満たすように、端末の集合を接続するネットワークの設計を考える。この問題は、端末の集合がLANなどを通じて様々なタイプの集線器で集線されるものであり、LANの設計において、非常に重要な課題となる。以下この集線装置配置問題[1, 5]を取り扱う。

集線装置配置問題 (Concentrator Location Problem)

- 集線装置を設置する候補地が与えられた上で、実際に設置する位置の決定
- ユーザーを表すノードの分布が示された時、各ノードと集線装置の接続を表すトポロジーの決定
- 実際に設置される集線装置と中心のセンターを結ぶリンクの決定

2　集線装置配置問題の定式化

無向グラフ$G = (V, A)$によって、コンピューターネットワークをモデル化した。点集合Vは、地理的な配置が分っている端末の集合M、集線装置を設置する候補地の集合をLから構成される。また、設置可能な集線装置の集合をKとする。辺集合Aは2点間の接続リンクを示す。各端末は何れかの集線装置に接続しなければならない。この時、集線装置の処理能力が、それに接続する各端末で発生する情報量の和を下回ってはいけない。

そして、全ての端末を集線装置に接続し、集線装置の設置場所を選定し総設置費用最小のネットワークを設計する。以下のように記号を定義すると、定式化は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\text{(IP1)}\ \min\ & \sum_{m\in M}\sum_{l\in L} c_{ml}x_{ml} + \sum_{l\in L}\sum_{k\in K} f_{lk}y_{lk} \\
\text{subject to}\ & \sum_{m\in M} a_m x_{ml} \le \sum_{k\in K} b_{lk}y_{lk},\ l\in L \\
& \sum_{l\in L} x_{ml} = 1,\ m\in M \\
& \sum_{k\in K} y_{lk} \le 1,\ l\in L \\
& x_{ml}, y_{lk} \in \{0,1\},\ m\in M, l\in L, k\in K
\end{aligned}
$$

表 1: 記号の説明

添字集合	意味
M	地理的な配置が分っている端末の集合
L	集線装置を設置する候補地の集合
K	設置可能な集線装置の集合
変数	**意味**
x_{ml}	端末mを候補地lに存在する集線装置に接続するとき1、それ以外0
y_{lk}	候補地lに機種kの装置を設置するとき1、それ以外0
パラメータ	**意味**
c_{ml}	端末mと候補地lとの接続費用
f_{lk}	候補地lで機種kを選択した時の選定費用
a_m	端末mにおける情報発生量
b_{lk}	候補地lで機種kを選択した時の処理能力

ここで、$y_{lk} = 1 - z_{lk}$と変換すると、問題は次の形になる。

$$
\begin{aligned}
\text{(IP2)}\ \min\ & \sum_{m\in M}\sum_{l\in L} c_{ml}x_{ml} + \sum_{l\in L}\sum_{k\in K} (1 - f_{lk})z_{lk} \\
\text{subject to}\ & \sum_{m\in M} a_m x_{ml} + \sum_{k\in K} b_{lk}z_{lk} \le \sum_{k\in K} b_{lk},\ l\in L \\
& \sum_{l\in L} x_{ml} = 1,\ m\in M \\
& \sum_{k\in K} z_{lk} \ge |K| - 1,\ l\in L \\
& x_{ml}, z_{lk} \in \{0,1\},\quad m\in M, l\in L, k\in K
\end{aligned}
$$

3　切除平面／分枝限定法

本稿で提案する手法は、Nemhauser - Wolsey [4]の枠組に基づくものである。

- フェイズ 1. 切除平面法
  整数計画問題の離散条件を連続緩和した線形計画問題を解き、その最適解を用いて妥当不等式を生成する。そして連続緩和問題に妥当不等式を追加線形計画問題を繰り返し解く。妥当不等式が生成できない場合は次のフェイズ2.へ移る。
- フェイズ 2. 分枝限定法
  フェイズ 1.で妥当不等式が加えられた問題に対して、分枝限定法により解を探索する。

定理 1 $\sum_{m\in C_M} x_{ml} + \sum_{k\in C_K} z_{lk} \le |C_M \cup C_K| - 1, l \in L$ は *(IP2)* の妥当不等式となる。

ただしC_M, C_Kは$C_M \subseteq M, C_K \subseteq K$ であり、かつ次の不等式を満たすものである。

$$\sum_{m\in C_M} a_m + \sum_{k\in C_K} b_{lk} > \sum_{k\in K} b_{lk}$$

すなわち、$C_M \cup C_K$は$\sum_{k\in K} b_{lk}$ に対する被覆となるものである。この不等式は、「候補地lにおける端末と集線装置の組合せ$C_M \cup C_K$は処理能力制約を侵すため、選定してはいけない」と解釈できる。

分離問題では、上の妥当不等式が (IP2) の連続緩和問題の最適解$\tilde{x}, \tilde{z}$ によって満たされないような $C_M \cup C_K$ を求める。ここで、$\tilde{x}, \tilde{z}$に対し、

$$\sum_{m\in C_M} \tilde{x}_{ml} + \sum_{k\in C_K} \tilde{z}_{lk} > |C_M \cup C_K| - 1$$

かつ$\sum_{m\in C_M} a_m + \sum_{k\in C_K} b_{lk} > \sum_{k\in K} b_{lk}$ となる $C_M \cup C_K$ を求める。そして、C_M, C_Kを表す変数をそれぞれ、v_m, w_kとする。すなわち、以下のように定める。

$$v_m = \begin{cases} 1, & \text{if } m \in C_M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad w_k = \begin{cases} 1, & \text{if } m \in C_K \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

候補地lにおける分離問題

$$\begin{array}{ll} \zeta_l = \min & \sum_{m\in M} (1-\tilde{x}_{ml}) v_m + \sum_{k\in K} (1-\tilde{z}_{lk}) w_k \\ \text{subject to} & \sum_{m\in M} a_m v_m + \sum_{k\in K} b_{lk} w_l > \sum_{k\in K} b_{lk} \\ & v_m, w_k \in \{0,1\},\ m \in M, k \in K \end{array}$$

切除平面法の一反復では、この分離問題を $l \in L$ について$|L|$回解くことになる。

4 liftingについて

$\sum_{m\in C_M} a_m + \sum_{k\in C_K} b_{lk} > \sum_{k\in K} b_{lk}$を満たす被覆に関し、$\lambda = \sum_{m\in C_M} a_m + \sum_{k\in C_K} b_{lk} - \sum_{k\in K} b_{lk}$ とする。そして、集合$\{a_m, m \in C_M\} \cup \{b_{lk}, k \in C_K\}$ の要素を、降順に並べ替えたものを$\{c_{j_1}, c_{j_2}, \dots, c_{j_r}\}$ とする。すなわち、$c_{j_1} \ge c_{j_2} \dots \ge c_{j_r}$ を満たすようにする。

そして、$\bar{C} = (M \cup K) \setminus (C_M \cup C_K)$, $\bar{K} = K \setminus C_K$, $\bar{M} = M \setminus C_M$, $\mu_0 = 0$, $\mu_h = \sum_{i=0}^{h} c_{j_i}$, $h = 1, \dots, r$ とする。$t > r$に対しては、$\mu_t = \mu_r$と定める。続いて、$k \in \bar{C}$に対して、$\mu_h \le a_k \le \mu_{h+1} - 1$ が成り立つ時、$\beta_k = h$とし、$Q \subseteq \bar{C}$について、$\beta(Q) = \sum_{j\in Q}(\beta_j + 1)$ と定め、次の形の妥当不等式を求める。

$$\sum_{m\in C_M} x_{ml} + \sum_{k\in C_K} z_{lk} + \sum_{j\in \bar{M}} \alpha_j x_{jl} + \sum_{j\in \bar{K}} \alpha_j z_{lj} \le |C_M \cup C_K| - 1$$

Nemhauser and Vance [3] は、Balas and Zemel [2] の結果を拡張してこの係数が $\alpha_j = \beta_j + 1$ となる変数の集合が満たすべき性質を示した。

定義 1 $S \subseteq \bar{C}$は、全ての空でない $Q \subseteq S$ について、$\sum_{j\in Q} a_j + \sum_{j\in Q} b_{lj} > \mu_{\beta(Q)} - \lambda$ が成立する時、独立 *(independent)* であるとする。

この条件を満たさないSは従属 *(dependent)* と呼ばれる。そして、次の問題を考える。

$$\begin{array}{rl} G(v) = & \max \sum_{m\in C_M} x_{ml} + \sum_{k\in C_K} z_{lk} \\ \text{subject to} & \sum_{m\in C_M} a_m x_{ml} + \sum_{l\in C_K} b_{lk} z_{lk} \le v \\ & x_{ml} \in \{0,1\}, m \in C_M \\ & z_{lk} \in \{0,1\}, k \in C_K \end{array}$$

ここで、$b = \sum_{k\in K} b_{lk}$とする。

すると、$G(b - \mu_{\beta(Q)} + \lambda - 1) \le r - \beta(Q) - 1$ となる。$b - \mu_{\beta(Q)} + \lambda = \mu_r - \mu_{\beta(Q)}$ は$C_M \cup C_K$における最小の$r - \beta(Q)$個の重みの和 $\sum_{i=\beta(Q)+1}^{r} c_i$ に等しいため、$G(b - \mu_{\beta(Q)} + \lambda) = r - \beta(Q)$ となるからである。上の独立性の定義より、$b - \sum_{j\in Q} a_j - \sum_{j\in Q} b_{lj} < b - \mu_{\beta(Q)} + \lambda$ となるため、

$$\begin{aligned} G(b - \sum_{j\in Q} a_j - \sum_{j\in Q} b_{lj}) &\le G(b - \mu_{\beta(Q)} + \lambda - 1) \\ &\le r - \beta(Q) - 1 \end{aligned}$$

となり、$\sum_{j\in Q} \alpha_j = \beta(Q)$ とすると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i\in Q} \alpha_i + G(b - \sum_{j\in Q} a_j - \sum_{j\in Q} b_{lj}) \\ \le\ & \beta(Q) + G(b - \mu_{\beta(Q)} + \lambda - 1) \\ \le\ & r - 1 \end{aligned}$$

が得られる。この不等式は、上で定められるSに関して、$\alpha_j = \beta_j + 1, j \in S$ とするliftingを行った時、妥当性を保持することを意味する。数値実験の結果は当日発表する。

参考文献

[1] D. Bertsekas and R. Gallager, *Data Networks*, Prentice - Hall, 1987.

[2] E. Balas and E. Zemel, Facets of the knapsack polytope from minimal covers, SIAM Journal on Applied Mathematics, 34, 119-148, 1978.

[3] G. L. Nemhauser and P. H. Vance, Lifted coner facets of the 0-1 knapsack polytope with GUB constraints, *Operations Research Letters*, 16, 255-263, 1994.

[4] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley-Interscience, 1988.

[5] H. Pirkul and R. Gupta, Topological design of centralized computer networks, *International Transactions in Operational Research*, 4, 75-83, 1997.