1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

高次元空間における安定集合多面体

02501520 東京工業大学 *藤江 哲也 FUJIE Tetsuya
01504250 東京理科大学 平林 隆一 HIRABAYASHI Ryuichi
01012660 東京理科大学 池辺 淑子 IKEBE Yoshiko
01207140 東京理科大学 品野 勇治 SHINANO Yuji

1 はじめに

無向グラフ $G=(V,E)$ の安定集合 $S(\subseteq V)$ とは，Sの任意の２頂点が枝で結ばれていないものをいう．安定集合多面体 STAB(G) は，安定集合に対応する 0-1 ベクトルの凸包として定義される．すなわち，

$$\mathrm{STAB}(G)\equiv \mathrm{co}\left(\left\{\chi^S\in\{0,1\}^{|V|}\mid S \text{ は安定集合}\right\}\right).$$

ただし，χ^Sは「$\chi^S_i=1\Leftrightarrow i\in S$」で定められる 0-1 ベクトルである．本稿では，STAB(G) に関連した多面体を定義し，その構造を調べる．特に妥当不等式のクラスを与え，それらがファセット (極大面) を定める必要十分条件を与える．

2 定義および研究の背景

$U\subseteq V$ に対し，$\overline{E}_U$ を枝集合 E に属さない (i,j) の集合で，$i\in U$ または $j\in U$ (両方も可) を満たすものとする．このとき，拡張安定集合多面体 ESTAB$_U(G)$ を次のように定義する：

$$\mathrm{ESTAB}_U(G)\equiv \mathrm{co}\left(\left\{\begin{array}{c}(x,y)\in\\ \{0,1\}^{|V|+|\overline{E}_U|}\end{array}\middle|\begin{array}{l}x\in\mathrm{STAB}(G),\\ y_{ij}=x_ix_j\\ \quad\text{for }(i,j)\in\overline{E}_U\end{array}\right\}\right).$$

ここで，$(i,j)\in E$に対する y_{ij}は，任意の安定集合に関して $y_{ij}=x_ix_j=0$ が成り立つので除去している．さらに，$i\in V$に対する y_{ii}も，任意の 0-1 変数 x_i に関して $y_{ii}=x_i^2=x_i$ が成り立つので除去している．ESTAB$_U(G)$ は，x-空間に射影すると STAB(G) になる．

以下では，ESTAB$_U(G)$ を研究する背景について述べる．グラフ G の中で要素数最大の安定集合を求める最大安定集合問題は，NP 困難であるため STAB(G) を含む多面体 $P\equiv\{x\in R^{|V|}\mid Ax\leq b\}$ の，STAB(G) への近似性が問題になる．そのため，STAB(G) の構造に関する研究は重要であり，多くの結果が得られている．一方，Balas, Ceria, Cornuéjols and Pataki [1, 2]，Lovász and Schrijver [3] は，射影の方法を通じて，STAB(G) をより良く近似する多面体が与えられることを示した．次に射影の方法について説明する．

G のクリーク $C(\subseteq V)$ とは，C の任意の２頂点が枝で結ばれているものをいう．このとき，任意の安定集合 (を表現する 0-1 ベクトル) x に対して，$x(C)\equiv\sum_{i\in C}x_i\leq 1$ が成り立つ．いま，$C_1,\ldots,C_K$ を G のクリークとし，$U\equiv\cup_{k=1}^K C_k$ とおく．また，$\mathrm{co}\left(P\cap\{0,1\}^{|V|}\right)=\mathrm{STAB}(G)$ を仮定する．以下は，[2] で与えられている手続きである：

1. 次のシステムを構成する：

$$\left.\begin{array}{rl}(1-x(C_k))(b-Ax)\geq 0 & (1\leq k\leq K)\\ x_i(b-Ax)\geq 0 & (i\in U)\end{array}\right\}\quad(1)$$

2. (1) の各式を展開し，2 次項 x_ix_j を y_{ij} に，x_i^2 を x_i に置き換える．ただし，$y_{ij}=y_{ji}$．この結果得られる多面体を $M_U(P)$ とする．

3. $M_U(P)$ を x-空間に射影して得られる多面体を $N_U(P)$ とする．

Balas, Ceria, Cornuéjols and Pataki [2] は，$N_U(P)$ が STAB(G) を強力に近似していることを示している．すなわち，

$$N_U(P)\subseteq\bigcap_{k=1}^K \mathrm{co}\left(\left\{x\in P\mid x_i\in\{0,1\}\ (i\in C_k)\right\}\right)$$

が成り立つ．これは $M_U(P)$ が ESTAB$_U(G)$ の強力な近似であることも同時に示している．[2] では，元空間 $R^{|V|}$ で切除平面法を設計するために $N_U(P)$ を用いている．一方，$ESTAB_U(G)$ の構造を調べることによって，$R^{|V|+|\overline{E}_U|}$ で切除平面法を設計することが可能になる．$R^{|V|}$ では多面体 P 上の最適化から始まるのに対して，$R^{|V|+|\overline{E}_U|}$ では，より良い多面体 $M_U(P)$ 上の最適化から始められるのが利点である．

3 結果

任意の $U \subseteq V$ に対して次のことが成り立つ:

補題 3.1 $\mathrm{ESTAB}_U(G)$ は *full-dimensional* である. ■

補題 3.2 $e \in \overline{E}_U$ に対して, $y_e \geq 0$ は $\mathrm{ESTAB}_U(G)$ のファセットを定める. ■

次節では, $\mathrm{ESTAB}_V(G)$, すなわち U が頂点集合 V に等しい多面体の, ファセットを与える. この他に, U がクリークの場合についてもファセットを導くことができたが, 紙面の都合上省略する.

3.1 $\mathbf{ESTAB}_V(G)$ のファセット

まず, 記号の定義を与える. $S \subseteq V$に対して, $\overline{E}(S) \equiv \{(i,j) \notin E \mid i,j \in S\}$, $\overline{N}(S) \equiv \{j \in V \setminus S \mid {}^{\exists}i \in S \text{ s.t. } (i,j) \in \overline{E}(S)\}$. $S \subseteq V, T \subseteq V \setminus S$ に対して, $\overline{E}(S:T) \equiv \{(i,j) \notin E \mid i \in S, j \in T \text{ or } j \in S, i \in T\}$. さらに singleton$\{i\}$ を i とも書くことにする.

定理 3.3 (カット不等式 (1)) $i \in V$, $T \subseteq V \setminus i$ とする. このとき

$$-x_i + \boldsymbol{y}(\overline{E}(i:T)) - \boldsymbol{y}(\overline{E}(T)) \leq 0 \qquad (2)$$

は $\mathrm{ESTAB}_V(G)$ の妥当不等式である. さらに, (2) が $\mathrm{ESTAB}_V(G)$ のファセットを定める必要十分条件は, 次の (i),(ii) を満たすことである:

(i) $\overline{E}(T) = \overline{E}(T \cap \overline{N}(i))$;

(ii) 任意の $j \in \overline{N}(i) \setminus T$ に対して, $k \in T$ が存在して $(j,k) \in \overline{E}$ となる. ■

定理 3.4 (カット不等式 (2)) $S \subseteq V$ $(|S| \geq 2)$, $T \subseteq V \setminus S$ とする. また,

$$\overline{E}(T)_S \equiv \left\{ \begin{array}{c} (i,j) \in \\ \overline{E}(T) \end{array} \middle| \begin{array}{l} {}^{\exists}k \in S \text{ s.t.} \\ \{i,j,k\} \ :\text{安定集合} \end{array} \right\},$$

$$\overline{E}(S)_T \equiv \left\{ \begin{array}{c} (i,j) \in \\ \overline{E}(S) \end{array} \middle| \begin{array}{l} {}^{\exists}(k,\ell) \in \overline{E}(T)_S \text{ s.t.} \\ \{i,j,k,\ell\} \ :\text{安定集合} \end{array} \right\}.$$

とする. このとき

$$-\boldsymbol{x}(S) - \boldsymbol{y}(\overline{E}(S)_T) + \boldsymbol{y}(\overline{E}(S:T)) - \boldsymbol{y}(\overline{E}(T)_S) \leq 0 \qquad (3)$$

は $\mathrm{ESTAB}_V(G)$ の妥当不等式である. さらに, (3) が $\mathrm{ESTAB}_V(G)$ のファセットを定める必要十分条件は, 次の (i),(ii),(iii) を満たすことである:

(i) 任意の $(i,j) \in \overline{E}(S:\overline{N}(S) \setminus T)$ に対し, $\{i,j,k\}$ が安定集合になる $k \in T$ が存在する;

(ii) 任意の $(i,j) \in \overline{E}(S) \setminus \overline{E}(S)_T$ に対し, $\{i,j,k\}$ が安定集合になる $k \in T$ が存在する;

(iii) 無向グラフ $H = (S, E_H)$ が連結である. ただし,

$$E_H \equiv \left\{ (i,j) \middle| \begin{array}{l} i,j \in S, \\ {}^{\exists}(k,\ell) \in \overline{E}(T) \text{ s.t.} \\ \{i,k,\ell\}, \{j,k,\ell\}:\text{安定集合} \end{array} \right\}.$$

■

定理 3.5 (クリーク不等式) $S \subseteq V$, α : 整数 とする. このとき

$$\alpha \boldsymbol{x}(S) - \boldsymbol{y}(\overline{E}(S)) \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \qquad (4)$$

は $\mathrm{ESTAB}_V(G)$ の妥当不等式である. さらに, (4) で$\alpha = 1$ とした式が $\mathrm{ESTAB}_V(G)$ のファセットを定める必要十分条件は, 次の (i),(ii) を満たすことである:

(i) 任意の $i \in V \setminus S$ に対して, $\{i,j,k\}$ が安定集合になる $j,k \in S$ が存在する;

(ii) 任意の $(i,j) \in \overline{E}(V \setminus S)$ に対して, $\{i,j,k\}$ が安定集合になる $k \in S$ が存在する. ■

定理 3.6 (Lifting 定理) $V = V' \cup \{n\}$ とおく. また, $T \subseteq V'(|T| \geq 3)$ を, $T \cup \{n\}$ が安定集合であるような集合とする. このとき, $\alpha_j \in R$ $(j \in \overline{N}(n) \setminus T)$ が存在して

$$\begin{aligned} &-\frac{(|T|+1)(|T|-2)}{2} x_n \\ &+ \textstyle\sum_{i \in T}(|T|-2) y_{ni} + \sum_{j \in \overline{N}(n) \setminus T} \alpha_j y_{nj} \\ &+ \boldsymbol{x}(V') - \boldsymbol{y}(\overline{E}(V')) \leq 1 \end{aligned}$$

が $\mathrm{ESTAB}_V(G)$ のファセットを定める. ■

参考文献

[1] E. Balas, S. Ceria, and G. Cornuéjols, "A Lift-and-Project Cutting Plane Algorithm for Mixed 0-1 Programs," *Math. Prog.*, **58** (1993) 295–324.

[2] E. Balas, S. Ceria, G. Cornuéjols, and G. Pataki, *"Polyhedral Methods for the Maximum Clique Problem,"* volume 26 of *DIMACS series on Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, pages 11–28, Springer-Verlag, 1996.

[3] L. Lovász and A. Schrijver, "Cones of Matrices and Set Functions and 0-1 Optimization," *SIAM J. on Optimization* **1** (1991) 166–190.