1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

航空機材割り当て逆問題について

01003676　九州大学　岩本誠一　IWAMOTO Seiichi
01009006　宮崎大学　伊喜哲一郎　IKI Tetsuichiro

1　はじめに

M.J. Beckmann は *Dynamic Programming of Economic Decisions* においていわゆる航空機材割り当て問題 "Plane Assignment Problem" に最適性の原理 "Principle of Optimality" を直感的に適用した動的計画法DPで解いている。この割り当て問題は線形計画法LP、整数計画法IP、組み合せ計画法CP、全数列挙法EMなどでも解ける。この報告では、新たに最適停止問題 Stopping Problem として定式化して、再帰式を導き、解いて、最適解として最適停止時間をも求める。さらにこの逆問題を導入して、問題としても最適解としても、与えられた本来の（主）問題との間に逆関係（逆定理）が成り立つことを示す。

2　問題と定式化

Beckmann の機材割り当て問題は200(×10)人の乗客を38(×10)人乗りの中型機と58(×10)人乗りの大型機を何機か用いて運ぶにはそれぞれ何機ずつ用いればよいかという組み合わせ問題である。ただし、大型機の運航費用は中型機の1.4倍とする。

航空機材	定員	運航費用
中型機	38(×10) 人	1.0(×千万円)
大型機	58(×10) 人	1.4(×千万円)

以下、単位 ×10, ×千万円 を付けないで、簡単のために、この問題を5つの数値データ 乗客200人；定員38人, 費用1.0；定員58人, 費用1.4 で考える。

Beckmannはこの問題を発見的に解いている。すなわち、$v(m)$ を乗客 m 人を運ぶ最小費用とすると、再帰式

$$v(m) = \min[1.4+v(m-58),\ 1.0+v(m-38)] \quad m = 59, \ldots$$

$$v(1) = \cdots = v(38) = 1.0, \quad v(39) = \cdots = v(58) = 1.4$$

が成り立つ 、としている。

さて、我々はこの機材割り当て問題をある種の**最適停止問題**として定式化して、逆理論を展開する。そのため、まず費用関数 $f : \{1, \ldots, 38, \ldots, 58\} \to \{1.0, 1.4\}$ を

$$f(1) = \cdots = f(38) := 1.0,\ f(39) = \cdots = f(58) := 1.4 \tag{1}$$

で定義する。Beckmannの機材割り当て問題は次の総費用最小化（主停止）問題で表される：

$$\begin{aligned} & \min \quad f(x_1) + \cdots + f(x_t) \\ \mathrm{MSP}(200)\ \text{s.t.} \quad & \text{(i)} \quad x_1 + \cdots + x_t = 200 \\ & \text{(ii)} \quad 1 \le x_n \le 58 \quad 1 \le n \le t \\ & \text{(iii)} \quad 1 \le t \le 200. \end{aligned} \tag{2}$$

この問題 MSP(200) の最小値を $v(200)$ とする。一般に、右辺定数200をパラメータ m の値として持つ問題 MSP(m) の最小値を $v(m)$ とする。ただし、m は自然数全体 $N = \{1, 2, \ldots, 200, \ldots\}$ を動くと考える。さて、離散区間 $< 1.0, \infty >$ は0.1から始まるステップ幅0.1の離散値 1.0, 1.1, ... の集合とする:

$$< 1.0, \infty > = \{1.0, 1.1, \ldots, 5.2, \ldots\}.$$

区間 $< 1.0, \infty >$ は最適値関数 v が取り得る可能な運航費用を含んでいる。まず、最小値関数 $v(\cdot)$ の単調性と再帰式は次のようになる:

補題 2.1 最小費用関数 $v : N \to < 1.0, \infty >$ は単調非減少で、m が大きくなると ∞ に近づく。

定理 2.1　$m = 59, 60, \ldots$ に対して

$$v(m) = \min[1.4 + v(m-58),\ 1.0 + v(m-38)]. \tag{3}$$

ただし $v(1) = v(2) = \cdots = v(38) = 1.0,$

$$\ldots, v(39) = v(40) = \cdots = v(58) = 1.4. \tag{4}$$

さらに、**最適政策** $\pi^* : N \to \{38, 58\}$ を次で定義する：

$$\pi^*(m) = \begin{cases} 58 \\ 38 \end{cases} \text{それぞれ} \begin{cases} 1.4 + v(m-58) \\ 1.0 + v(m-38) \end{cases} \tag{5}$$

が (3) の最小値に到達するとき。

3　人数最大化問題

前節の問題は、総運航人数一定（200人）のときの、総運航費用最小化問題であった。この節では、逆に総運航費用一定以下での総運航人数最大化問題を考えよう。
総運航人数最大（逆停止）問題：

$$
\begin{array}{llll}
 & \text{Max} & x_1 + \cdots + x_t & \\
\text{ISP}(c) \text{ s.t.} & \text{(i)} & f(x_1) + \cdots + f(x_t) \leq c & (6) \\
 & \text{(ii)} & 1 \leq x_n \leq 58 \quad 1 \leq n \leq t & \\
 & \text{(iii)} & t \geq 1 &
\end{array}
$$

の最大値を $u(c)$ とする。ただし、c は離散区間 $< 1.0, \infty >$ 全体を動く。

補題 3.1　最大人数関数 $u :< 1.0, \infty > \rightarrow N$ は非減少で、c が大きくなると ∞ に近づく。

定理 3.1　$c = 1.5, 1.6, \ldots$ に対して

$$u(c) = \text{Max}[58 + u(c-1.4), 38 + u(c-1.0)]. \quad (7)$$

ただし $u(0.1) = \cdots = u(0.9) = 0$,

$$u(1.0) = \cdots = u(1.3) = 38, \quad u(1.4) = 58. \quad (8)$$

最適政策 $\hat{\sigma} :< 1.0, \infty > \rightarrow \{38, 58\}$ を次で定義する：

$$\hat{\sigma}(c) = \begin{cases} 58 \\ 38 \end{cases} \quad \text{それぞれ} \begin{cases} 58 + u(c-1.4) \\ 38 + u(c-1.0) \end{cases} \quad (9)$$

が (7) の最大値に到達するとき。

このとき、主問題の最小値関数と逆問題の最大値関数には間には次の合成関係が成立する：

定理 3.2 (弱逆定理 I)

$$\text{(i)} \quad v(u(c)) \leq c \quad c \in < 1.0, \infty > \quad (10)$$

$$\text{(ii)} \quad u(v(m)) \geq m \quad m \in N. \quad (11)$$

さて、$X, Y \subset R^1$ を1次元ユークリッド空間 R^1 の空でない離散部分集合として、非減少関数 $w : X \rightarrow Y$ を考える。このとき、2種類の逆関数、**上半逆関数** w^{-1}, **下半逆関数** w_{-1}: $Y \rightarrow X$ をそれぞれ次で定義する：

$$w^{-1}(y) := \min\{x \in X \mid w(x) \geq y\} \quad (12)$$

$$w_{-1}(y) := \text{Max}\{x \in X \mid w(x) \leq y\}. \quad (13)$$

特に、値 $y \in Y$ は、ある $x \in X$ が $w(x) = y$ を満たすとき、**到達可能**という。このとき、

補題 3.2

$$w_{-1}(y) \geq w^{-1}(y) \quad \text{到達可能な } y \in Y \text{のとき} \quad (14)$$

$$w_{-1}(y) < w^{-1}(y) \quad \text{その他.} \quad (15)$$

特に、到達不可能な $y \in Y$ に対しては、二つの値 $w_{-1}(y)$, $w^{-1}(y)$ は X 上で相い隣る値を取る。

この逆関数を用いると、弱逆定理は次のように強められる：

定理 3.3 (強逆定理 I)

$$\text{(i)}' \quad v_{-1}(c) = u(c) \quad c \in < 1.0, \infty > \quad (16)$$

$$\text{(ii)}' \quad u^{-1}(m) = v(m) \quad m \in N. \quad (17)$$

さらに、最適値関数と最適政策の対については逆の意味で一方の対が他方を特徴づけている：

定理 3.4 (厳逆定理 I)

$$\text{(iii)}' \quad \hat{\sigma}(c) = \pi^*(v_{-1}(c)) \quad c \in < 1.0, \infty > \quad (18)$$

$$\text{(iv)}' \quad \pi^*(m) = \hat{\sigma}(u^{-1}(m)) \quad m \in N. \quad (19)$$

この関係をシンボリックに

$$\hat{\sigma} = \pi^* \circ v_{-1} \text{ on } < 1.0, \infty >, \quad \pi^* = \hat{\sigma} \circ u^{-1} \text{ on } N \quad (20)$$

で表す。ただし、演算 $\circ$ は関数の合成である。

4　非停止問題

前節までの問題は、第3制約条件 (iii) $t \geq 1$ が示しているように、最適停止時間 t をも求める最適停止問題でもあった。この節ではこの第3条件を課さない（非停止）問題を考える。すなわち、各 $n \in N$ 毎に 2条件:

(i) $x_1 + \cdots + x_n = m \in N_n$

　$(f(x_1) + \cdots + f(x_n) \leq c \in C_n)$

(ii) $1 \leq x_i \leq 58 \quad 1 \leq i \leq n$

下で主問題 MNP$(n; m)$ と逆問題 INP$(n; c)$ を考える。ただし

$$N_n \quad := \quad \{n, n+1, \ldots, 58n\} \quad (21)$$

$$C_n \quad := \quad \{1.0n, 1.0n + 0.1, \ldots, 1.4n + 0.5\}. \quad (22)$$

このとき、最適値関数

$$v_n : N_n \rightarrow C_n, \quad u_n : C_n \rightarrow N_n$$

の族にそれぞれ再帰式が成り立ち、両関数間に弱逆定理 II, 強逆定理 II, 厳逆定理 II が成立する。また、v, v_n 間に主包絡定理、u, u_n 間に逆包絡定理等がそれぞれ成り立つ。さらに、$t^*(m)$, $\hat{t}(c)$ をそれぞれ主問題、逆問題の最適停止時刻とすると、両時刻の間には、次の逆関係が成り立つ：

定理 4.1 (逆停止時間定理)

$$\hat{t} = t^* \circ v_{-1} \; on \; < 1.0, \infty >, \quad t^* = \hat{t} \circ u^{-1} \; on \; N. \quad (23)$$