1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

区間法を利用した目標計画法の解

01007884　京都産業大学　　市田浩三　　ICHIDA　Kozo

1. はじめに

工学や経営科学に現れる非線形最適化問題の中でも，目的関数が多峰性である場合に，その大域的最適解を求めることは困難な問題である [1]。近年，区間法を利用して，この大域的最適解を求める方法が開発されてきている [2]。区間法は定数，変数，関数等を幅を持った区間として扱い [3]，変数領域を順次分割して各部分領域 (ボックス) における関数値の上限と下限を評価し，最適解を含む可能性のない領域を捨てていくことにより，最適解を求める方法である。区間法の特徴は，常に，大域的最適解 (複数個あればそのすべて) を厳密な誤差限界とともに求めることができることである。このため自己検証形計算法と呼ばれることもある。さらに，その収束を速め解の精度を上げるために，ニュートン法を含む種々の方法が開発されている [4]。

しかし，最適化問題の中には，目的関数が複数個存在し，それらが互いに競合する場合が少なくない [5]。この問題は多目的最適化問題と呼ばれ，何らかの方法で目的関数をバランスさせることが必要になる。ここでは，多目的最適化問題のうちの目標達成の概念を定式化した目標計画法の問題を区間法を利用して解く方法について述べる。

2. 目標計画法

多目的計画問題の各目的関数に対して，意思決定者が達成したいと考えている目標値を目的関数空間において明確に規定することができる場合には，目標値にできるだけ近づけるような実行可能解を求めることになる。より一般的な目標計画法では，各目標値$\hat{f}_i$の重要さに応じて，目的関数 $f_1(x), ..., f_k(x)$ を最も重要なものからそうでないものへと順序づけて，それらを L 個 $(1 \le L \le k)$ の優先順位のあるクラスに分類し，各クラスに絶対優先順位係数 $P_1, ..., P_L$を与える。超過達成 d_i^+ 及び不足達成 d_i^- の重みをそれぞれ w_i^+，w_i^- とすると，絶対優先順位係数を取り入れた目標計画問題は次のように表される [6]。

$$\text{minimize} \quad \sum_{l=1}^{L} P_l\Big(\sum_{i \in I_l}(w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-)\Big) \qquad (1)$$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} g_j(x) = 0, \quad j = 1, ..., m \\ h_j(x) \le 0, \quad j = 1, ..., t \\ f_i(x) - d_i^+ + d_i^- = \hat{f}_i, \quad i = 1, ..., k \\ d_i^+ \cdot d_i^- = 0, \quad i = 1, ..., k \\ d_i^+ \ge 0, \ d_i^- \ge 0, \quad i = 1, ..., k \end{array}\right\} \qquad (2)$$

ここで $I_l \ne \phi$は l番目のクラスの目的関数の添字の集合である。

3. 区間法

区間法は，領域分割と関数値比較，制約条件の判定及び区間ニュートン法を用いて，大域的な最適解が存在しない領域を捨てていくことによって，最適解を求める方法である。絶対優先順位係数を取り入れた目標計画法，すなわち，制約条件 (2) のもとで (1) の大域的最小値を求めるアルゴリズムは次の通りである。変数の初期ボックスとしては，大域的最小値を含むような十分大きい領域をとればよい。また，２つ以上の初期ボックスがあってもよい。初期ボックスはリスト L_1 に置く。終了の判定条件のためボックスに対するε_Xと関数値に対するε_Fの値を与える。また，途中の段階の解集合を覆う区間の大きさに対するεを与える。$l = 1$ と置く。

[アルゴリズム]

ステップ１：リスト L_1の中の各ボックスの中に制約条件を満たしている点があるかどうか調べる。このために，各ボックスの端点における制約条件を評価する。不等式制約条件の場合は，各制約条件を満足する点が端点の中にあればよい。等式制約条件の場合は，$h_j(x) \ge 0$ と $h_j(x) \le 0$ を満たす点が端点の中にあればよい。

ステップ２：リスト L_1の中の各ボックスについて lに対する目的関数の値を計算し，その中の上限の最小値を $\overline{f}$とする。関数値の上限が$\overline{f}$以上であるボックスを L_1 から除く。

ステップ３：L_1が空であればステップ６へ行く。そうでないときは，上限が最小であるボックスを分割してステップ４へ行く。

ステップ４：各ボックスについて，制約条件の式を評価する。制約条件が満たされていなければ，そのボックスを除く。

ステップ５：各ボックスについて，判定条件εをテストする。この条件が満足されれば，そのボックスをリスト L_2に置いてステップ６へ行く。そうでなければ，ボックスを２等分してステップ２へ行く。

ステップ６：終了の判定条件ε_Xとε_Fをテストする。両方の条件が満足されれば終了する。そうでなければ，$l = l + 1$ とし，リスト L_2中のボックスを L_1に移して $L_2 = \phi$とし，ステップ１へ行く。

4. 計算例

例 1　minimize

$$\{d_1^- + d_2^-, d_3^-, d_4^-\}$$

subject to

$$x_1 + d_1^- - d_1^+ - 0.1 = 0$$

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ - 0.1 = 0$$

$$x_1 - x_2 + d_3^- - d_3^+ - 0.1 = 0$$

$$(x_1 - 0.4)^2 + 2(x_2 - 0.2)^2 - d_4^- + d_4^+ + 0.1 = 0$$

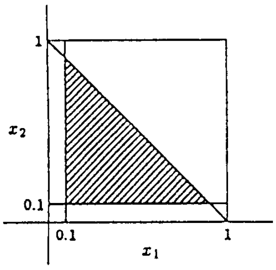
$$x_1 + x_2 \le 1, \ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$$

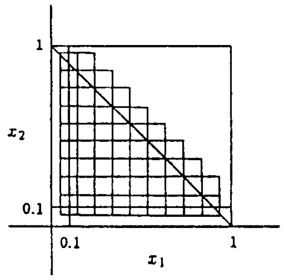
$$d_i^+ \cdot d_i^- = 0,\ \ d_i^+ \geq 0,\ \ d_i^- \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

(1) $\{d_1^- + d_2^-\}$ の最小値
明らかに $\{d_1^- + d_2^-\}$ の最小値は 0 であり，このとき領域

$$0.1 \leq x_1 \leq 1,\ \ 0.1 \leq x_2 \leq 1,\ \ x_1 + x_2 \leq 1$$

が第 1 段階の解集合である。この領域は区間解の有限個の和集合で覆われる。





(2) $\{d_3^-\}$ の最小値
$d_3^- = 0$ とすると

$$d_3^+ = x_1 - x_2 - 0.1 \geq 0$$

となるから，第 2 段階の解集合とこれを覆う区間解の領域は狭くなる。
(3) $\{d_4^-\}$ の最小値
$d_4^- = 0$ とすると

$$d_4^+ = -(x_1 - 0.4)^2 - 2(x_2 - 0.2)^2 - 0.1 \geq 0$$

を満たす解はない。従って $d_4^- > 0$, $d_4^+ = 0$ となる。制約条件のもとで d_4^- の最小値を求めると $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.2$ を含むボックスが得られ，このとき $d_4^- = 0.1$ である。

例 2 minimize

$$\{d_1^- + d_2^- + d_3^- + d_4^-, d_5^-, d_6^+, d_7^-, d_8^+, d_9^-, d_{10}^+, d_{11}^-, d_{12}^+\}$$

subject to

$$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 0.01$$

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0.01$$

$$x_3 + d_3^- - d_3^+ = 0.01$$

$$x_4 + d_4^- - d_4^+ = 0.01$$

$$12.0x_1 + 11.9x_2 + 41.8x_3 + 52.1x_4 - 0.841(0.2809x_1^2$$
$$+0.1936x_2^2 + 20.25x_3^2 + 0.6241x_4^2)^{\frac{1}{2}} + d_5^- - d_5^+ = 21$$
$$24.55x_1 + 26.75x_2 + 39.00x_3 + 40.50x_4 + d_6^- - d_6^+ = 30$$
$$12.0x_1 + 11.9x_2 + 41.8x_3 + 52.1x_4 - 1.282(0.2809x_1^2$$
$$+0.1936x_2^2 + 20.25x_3^2 + 0.6241x_4^2)^{\frac{1}{2}} + d_7^- - d_7^+ = 21$$
$$24.55x_1 + 26.75x_2 + 39.00x_3 + 40.50x_4 + d_8^- - d_8^+ = 29.9$$
$$12.0x_1 + 11.9x_2 + 41.8x_3 + 52.1x_4 - 1.645(0.2809x_1^2$$
$$+0.1936x_2^2 + 20.25x_3^2 + 0.6241x_4^2)^{\frac{1}{2}} + d_9^- - d_9^+ = 21$$
$$24.55x_1 + 26.75x_2 + 39.00x_3 + 40.50x_4 + d_{10}^- - d_{10}^+ = 29.8$$
$$12.0x_1 + 11.9x_2 + 41.8x_3 + 52.1x_4 - 2.323(0.2809x_1^2$$
$$+0.1936x_2^2 + 20.25x_3^2 + 0.6241x_4^2)^{\frac{1}{2}} + d_{11}^- - d_{11}^+ = 21$$
$$24.55x_1 + 26.75x_2 + 39.00x_3 + 40.50x_4 + d_{12}^- - d_{12}^+ = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$2.3x_1 + 5.6x_2 + 11.1x_3 + 1.3x_4 \geq 5$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$
$$d_i^+ \cdot d_i^- = 0,\ \ d_i^+ \geq 0,\ \ d_i^- \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., 12)$$

得られた区間解は

$$X_1 = [0.62742, 0.62743]$$

$$X_2 = [0.01000, 0.01001]$$

$$X_3 = [0.30913, 0.30914]$$

$$X_4 = [0.05343, 0.05344]$$

であるが，この解は区間であるため，等式制約条件は正確には成り立たない。さらに，分割を進めると次の実数解が得られる。

$$x_1 = 0.6274286 \qquad x_2 = 0.0100017$$

$$x_3 = 0.3091392 \qquad x_4 = 0.0534305$$

この解においては

$$d_1^- = d_2^- = d_3^- = d_4^- = d_5^- = 0$$

$$d_6^+ = d_7^- = d_8^+ = d_9^- = 0$$

$$d_{10}^+ = 0.091281655 \qquad d_{10}^- = 0$$

となる。これまでに知られている最適解は

$$x_1 = 0.62743 \qquad x_2 = 0.01000$$

$$x_3 = 0.30914 \qquad x_4 = 0.05343$$

で [7]，このとき

$$d_9^- = 0.000000912356484 \qquad d_9^+ = 0$$

である。従って，我々の解の方がより正確である。なぜなら，我々の解は d_{10}^+ の段階で得られているが，これまでの最適解は d_9^- の段階で得られたものであるからである。

参考文献

[1] Floudas, C.A. and Pardalos, P.M. (eds.), 1992, Recent Advances in Global Optimization, Princeton University, New Jersey.

[2] Hansen, E.R., 1992, Global Optimization Using Interval Analysis, Marcel Dekker, New York.

[3] Moore, R.E., 1966, Interval Analysis, Prentice-Hall, New Jersey.

[4] Hansen, E.R., 1978, Interval forms of Newton's Method, Computing, 20:153-163.

[5] Stadler, W. (ed.), 1988, Multicriterion Optimization in Engineering and in the Sciences, Plenum Press, New York.

[6] Sakawa, M., 1993, Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Press, New York.

[7] Zheng, D.W., Gen, M. and Ida, K., 1995, Evolution Program for Nonlinear Goal Programming, Proc. 18th Int. Conf. on Computers & Industrial Engineering, Shanghai, 1426-1430.