半正定値相補性問題に対する新しいメリット関数

京都大学　*山下 信雄　YAMASHITA Nobuo
福島 雅夫　FUKUSHIMA Masao

1　序論

最近, 制御や組み合わせ問題に応用することができる半正定値問題(SDP)が活発に研究されている. このSDPの自然な拡張として, 次の半正定値相補性問題(SDCP)がある[2]. Find $x \in S$ such that

$$\text{[SDCP]} \qquad \langle x, F(x)\rangle = 0,\ x \in K,\ F(x) \in K.$$

ここで, Sは$n \times n$対称行列の集合, $K \subseteq S$は半正定値対称行列の集合であり, FはSからSへの関数である. また, $\langle\cdot,\cdot\rangle$は$\langle x, y\rangle := \mathrm{trace}\{xy\}$で定義される内積である. この問題は$S$を対角行列に限定すれば, 非線形相補性問題(NCP)に帰着することができる.

このSDCPを解くアプローチの方法はいろいろある. 上に述べたようにSDCPはNCPの拡張とみなすことができるので, NCPに対するアプローチをSDCPに対しても応用することが期待できる. とくに, NCPに対して最近注目を集めている手法のひとつである元の問題を等価な最小化問題に再定式化して解く手法[1]をSDCPに対しても拡張することが考えられる. ここで, その等価な最小化問題の目的関数をメリット関数と呼ぶことにする. このアプローチに関して, つい最近, Tseng[3]はNCPに対して知られているいくつかのメリット関数が, SDCPにも拡張できることを示している. その中でも, squared Fischer-Burmeister関数は構造が簡単で, しかも, その関数の停留点がSDCPの解となる条件が緩いことが示されている. しかしながら, Tsengの論文では, これらのメリット関数のレベル集合が有界となる条件は与えられていない. レベル集合の有界性は, 最小化問題を降下法で解く際に, 生成される点列が集積点をもつことを保証する重要な性質である. 今回の発表で提案するSDCPに対するメリット関数は, squared Fischer-Burmeister関数の多くのよい性質を保持しつつ, レベル集合が有界となる条件が緩いという好ましい性質をもっている.

本発表では, 次のメリット関数を提案する.

$$f(x) = \psi(\langle x, F(x)\rangle) + \phi(x, F(x)). \tag{1}$$

ここで, $\psi : R \to R$, $\phi : S \times S \to R$は, それぞれ,

$$\psi(t) = \frac{1}{4}\max\{0, t\}^4 \tag{2}$$

$$\phi(a, b) = \frac{1}{2}\|(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} - a - b\|^2 \tag{3}$$

であり, $\|\cdot\|$は$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$で定義される. 関数$\phi$はsquared Fischer-Burmeister関数をSDCPに拡張したものである.

2　基本的性質

この節では, 提案するメリット関数fの性質を示す上で有用ないくつかの数学的事実を紹介する. まず, 本発表で用いる演算子と集合を次のように定義する. これらの定義は[3]による.

定義 2.1 (a) $[\cdot]_+$と$[\cdot]_-$は, それぞれ, Kと$-K$への射影を表す.

(b) $sym[\cdot]$は$sym[x] = x + x^T$を表す.

(c) 集合S_cは, $x \in S$でxの核がcの核に含まれる行列の集合である.

(d) $L_c : S_c \to S_c$は$L_c[x] = cx + xc$で定義される.

上記で定義した演算子L_cはS_c上で正定値であり, 逆写像L_c^{-1}が存在する[3].

次に(2)で定義された関数ψの性質を示す.

補題 2.1 ψを(2)で定義された関数とする. このとき, ψは微分可能であり, すべてのtに対して$t\nabla\psi(t) \geq 0$である. さらに, $t\nabla\psi(t) = 0$であれば, $t \leq 0$である.

次に(3)で定義された関数ϕの性質を記す. この補題の(a),(b)は, [3]で示されている.

補題 2.2 (a) 任意の$a, b \in S$に対して$\phi(a, b) \geq 0$であり, $\phi(a, b) = 0$と$a \in K$, $b \in K$, $\langle a, b\rangle = 0$は等価である.

(b) ϕは微分可能で,

$$\begin{pmatrix} \nabla_a\phi(a,b) \\ \nabla_b\phi(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sym[L_c^{-1}[c-a-b](a-c)] \\ sym[L_c^{-1}[c-a-b](b-c)] \end{pmatrix}$$

が成り立つ. ここで, $c := (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$である.

(c) すべての$(a, b) \in S \times S$に対して,

$$\langle\nabla_a\phi(a,b), \nabla_b\phi(a,b)\rangle \geq \|(c-a-b)L_c^{-1}[c-a-b]\|^2,$$

$$\|c-a-b\|^2 = \langle a, \nabla_a\phi(a,b)\rangle + \langle b, \nabla_b\phi(a,b)\rangle$$

が成り立つ.

(d) 任意の$a,b\in S$に対して,

$$4\phi(a,b)\geq \|[-a]_+\|^2+\|[-b]_+\|^2$$

が成り立つ. □

この補題を用いるとϕの極限での振る舞いを解析することができる.

補題 2.3 点列$(a^k,b^k)\in S\times S$に対して, 次の命題が成り立つ.

(a) $\{a^k\}$の最小固有値の列を$\{\lambda_1^k\}$とする. このとき, $\lambda_1^k\to-\infty$ならば, $\phi(a^k,b^k)\to\infty$である.
(b) $\{a^k\}$と$\{b^k\}$の最小固有値の列は下に有界であるとする. $\{a^k\}$の最大固有値の列を$\{\lambda_n^k\}$とする. そのとき, $\lambda_n^k\to\infty$ならば, 任意の正定値行列$g,h\in S$に対して, $\lim_{k\to\infty,k\in\kappa}(\langle g,a^k\rangle+\langle h,b^k\rangle)=\infty$をみたす部分列$\kappa\subseteq\{1,2,\cdots\}$が存在する. □

3 新しいメリット関数の性質

この節では, (1) で定義されるメリット関数fの様々な性質を示す.

まず, 最小化問題:

$$\min_{x\in S}\quad f(x) \tag{4}$$

は, fの定義と補題2.2 (b) より, SDCP と等価になる.

定理 3.1 fは非負である. $f(x)=0$とfが$SDCP$の解であることは等価である. □

一般に関数fは凸とはならない. ところが, 通常の最適化アルゴリズムは, 目的関数の停留点を求めるものであるから, 目的関数の停留点が, その問題の解であるための条件を求めることは重要である. 次の定理はその条件を与えるもので, 補題2.1, 2.2 (c) を用いて証明することができる.

定理 3.2 Fが微分可能ならば, fも微分可能である. さらに, Fが単調関数, すなわち,

$$\langle x-y,F(x)-F(y)\rangle\geq 0\quad \textit{for all } x,y\in S$$

であれば, fの停留点は$SDCP$の解となる. □

次にfのすべてのレベル集合が有界となる条件を与える. 序論でも述べたように, この性質はfに対する降下法の大域的収束性を示す上で重要な役割を果たす. 補題2.3を用いることによって, 次の定理を証明できる.

定理 3.3 Fが単調で$SDCP$は狭義実行可能, つまり, xと$F(x)$がともに正定値対称行列となる$x\in S$が存在するとする. このとき, $\mathcal{L}(c):=\{x\mid f(x)\leq c\}$はすべての$c\geq 0$に対して有界となる. □

関数fのエラーバウンドに対して, 次の定理がなりたつ. エラーバウンドは, アルゴリズムの終了条件や収束率の解析に役立つ性質である.

定理 3.4 Fが強単調であるとする. このとき, 不等式

$$c\|x-x^*\|^2\leq f(x)\quad \textit{for all } x\in S$$

をみたす正の定数cが存在する. ここで, x^*は$SDCP$の唯一解である. □

4 今後の課題

本発表では, SDCP に対して (1) で定義されるメリット関数fが様々な好ましい性質を持っていることを示した. これからの課題として, 等価な最小化問題 (4) を効率よく解く手法を開発することが挙げられる. そのなかでも, SDCP と等価な方程式系:

$$\Phi(x)=(x^2+F(x)^2)^{\frac{1}{2}}-x-F(x)=0$$

を一般化ニュートン法で解く方法が有望である. 一般化ニュートン法の理論的有効性を示すために, 関数Φの性質, 例えばsemismooth 性を調べる必要がある.

参考文献

[1] Fukushima, M., "Merit functions for variational inequality and complementarity problems," *Nonlinear Optimization and Applications*, Edited by G. Di Pillo and F. Giannessi, Plenum Press, New York, NY, pp. 155–170, 1996.

[2] Shida, M. and Shindoh, S., "Monotone semidefinite complementarity problems", Research Report 312, Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan, 1996.

[3] Tseng, P., "Merit functions for semi-definite complementarity problems", working paper, Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA, 1996.