# ファジィ線形計画問題における適合性と逆問題について

01109213　金沢女子短期大学　桑野 裕昭　KUWANO Hiroaki

## 1 はじめに

本報告では、次のファジィ線形計画問題(可能性線形計画問題)の逆問題を定義し、その性質を調べる。

$$\text{(FLP)}\quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \tilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \tilde{A}\boldsymbol{x} \leq \tilde{\boldsymbol{b}},\ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array}$$

ここで $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ であり、

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}), \qquad \tilde{\boldsymbol{b}} = \left(\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_m\right)^T, \qquad \tilde{\boldsymbol{c}} = (\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_n)^T$$

の要素はすべて相互作用のない三角型の可能性変数である。これらの可能性変数は $\{a_{ij}^1\}, \{b_i^1\}, \{c_j^1\}$ を1-レベル集合、$[a_{ijL}, a_{ijU}], [b_{iL}, b_{iU}], [c_{jL}, c_{jU}]$ を0-レベル集合にそれぞれ持つとする。

ここで対象とする逆問題は FLP の代替問題 – Kuwano et al. [1] において FLP に対して最適性の概念を定義する過程において現れるパラメトリックな代替問題 – に対して定義される計画問題である。以下では [1] で与えた適合性に関連する条件の下、FLP の代替問題とその逆問題との関係を調べる。

## 2 FLP の代替問題

FLP に関するパラメトリックな代替問題を次のように定義する。$(0 \leq \alpha, \beta \leq 1)$

$$\text{(PLP}_U\text{-}(\alpha,\beta))\quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{c}_U^{\beta T} \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X(\alpha), \end{array}$$

$$\text{(PLP}_L\text{-}(\alpha,\beta))\quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{c}_L^{\beta T} \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X(\alpha) \end{array}$$

ここで $\boldsymbol{c}_U^{\beta T} = (c_{1U}^\beta, \cdots, c_{nU}^\beta)$, $\boldsymbol{c}_L^{\beta T} = (c_{1L}^\beta, \cdots, c_{nL}^\beta)$ であり、$c_{jL}^\beta$, $c_{jU}^\beta$ はそれぞれ $\tilde{c}_j$ の $\beta$-レベル集合の下限及び上限である。また

$$X(\alpha) = \left\{ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \,\middle|\, \text{Poss}\left(\tilde{A}\boldsymbol{x} \leq \tilde{\boldsymbol{b}}\right) \geq \alpha \right\}$$

である。

特に $\alpha$ を任意に固定し $\beta = 1$ とおくと $\text{PLP}_U$-$(\alpha, 1)$ と $\text{PLP}_L$-$(\alpha, 1)$ は一致する。そこで、その問題を簡単に PLP-$\alpha$ と表す。また、各々の $\alpha \in [0,1]$ に対し PLP-$\alpha$ の最適解を FLP の **$\alpha$-最適解**と呼ぶ。

**仮定 1**　$X(1)$ は空ではない有界な集合である。

**定義 1**　可能性 $\alpha$ に対して

$$\boldsymbol{c}^1 \in \mathcal{C}\left\{ \boldsymbol{a}_{iL}^{\alpha T} \,\middle|\, i \in I(\boldsymbol{x}_0) \right\}$$

が成立するならば、**$\alpha$ は PLP-1 に対して適合する**という。ここで $\boldsymbol{x}_0$ は PLP-1 の最適解、$I(\boldsymbol{x}_0)$ は $\boldsymbol{x}_0$ において活性な制約式の添字集合である。また $a_{iL}^\alpha = (a_{i1L}^\alpha, \cdots, a_{inL}^\alpha)$ であり $a_{ijL}^\alpha$ は $\tilde{a}_{ij}$ の $\alpha$-レベル集合の下限を表す。

**定理 1**　任意に $\alpha \in [0,1]$ を固定し $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ をそれぞれ PLP-1, PLP-$\alpha$ の最適解とする。また $I(\boldsymbol{x}_0) = \{i_1, i_2, \cdots, i_p\}$ とおき

$$D^\alpha = \left(a_{i_1L}^{\alpha T}, a_{i_2L}^{\alpha T}, \cdots, a_{i_pL}^{\alpha T}\right) \in \mathbf{R}^{p \times n}$$

と表す。このとき $\alpha$ が PLP-1 に適合することと問題

$$(\text{Q}_\alpha)\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{c}^1 \\ \text{subject to} & \boldsymbol{y}^T D^\alpha \geq \mathbf{o}. \end{array}$$

に最適解が存在することは必要十分条件をなす。

$\text{Q}_\alpha$ の最適値関数を $\psi(\alpha) = \inf\left\{ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{c}^1 \,\middle|\, \boldsymbol{y}^T D^\alpha \geq \mathbf{o} \right\}$ によって表し、集合 $\left\{ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{c}^1 \,\middle|\, \boldsymbol{y}^T D^\alpha \geq \mathbf{o} \right\}$ が下に非



© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

有界のとき $\psi(\alpha)=-\infty$ と定義すれば、次の結果を得る。

**系 1** 任意に固定された $\alpha$ に対し $\psi(\alpha)=0$ ならば $\alpha$ は PLP-1 に適合し、$\psi(\alpha)=-\infty$ ならば $\alpha$ は PLP-1 に適合しない。また、それぞれ逆も成立する。

**系 2** 任意に固定された $\alpha$ に対する $\mathrm{Q}_\alpha$ の最適解を $\boldsymbol{y}^*$ で表す。このとき $\alpha$ が PLP-1 に適合することと $\boldsymbol{y}^*=\mathbf{o}$ であることは必要十分条件をなす。

一方、 PLP-$\alpha$ の最適値関数は $\boldsymbol{x}^*(\cdot)$ と $\psi$ は次の定理で述べられる関係を持つ。

**定理 2** 任意の $\alpha\in[0,1]$ に対して $\alpha$-最適解 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ がただ一つ定まり、$\psi(\alpha)=0$ であるならば、$\boldsymbol{x}^*(\cdot):[0,1]\to\mathbf{R}^n$ は連続である。

## 3 逆問題

この節では FLP の代替問題族において重要な役割を果たす PLP-$\alpha$ に対し、逆問題を次のように定義し、その性質を調べる。

$$
(\mathrm{IP}_z)\quad
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \mathrm{Poss}\left(\tilde{A}\boldsymbol{x}\le\tilde{\boldsymbol{b}}\right)\\
\text{subject to} & \boldsymbol{c}^{1T}\boldsymbol{x}\ge z,\\
& \boldsymbol{x}\ge\mathbf{o}.
\end{array}
$$

いずれかの $\alpha\in[0,1]$ に対し PLP-$\alpha$ の最適値となりうるすべての実数からなる集合を $S$ とし、2つの関数 $\sigma:[0,1]\to S$, $\tau:S\to[0,1]$ をそれぞれ

$$\sigma(\alpha)=\max\left\{\boldsymbol{c}^{1T}\boldsymbol{x}\,\middle|\,\mathrm{Poss}\left(\tilde{A}\boldsymbol{x}\le\tilde{\boldsymbol{b}}\right)\ge\alpha,\boldsymbol{x}\ge\mathbf{o}\right\}$$

と

$$\tau(z)=\max\left\{\mathrm{Poss}\left(\tilde{A}\boldsymbol{x}\le\tilde{\boldsymbol{b}}\right)\,\middle|\,\boldsymbol{c}^{1T}\boldsymbol{x}\ge z,\boldsymbol{x}\ge\mathbf{o}\right\}$$

によって定義する。このとき次の定理が成り立つ。

**定理 3** 任意の $\alpha\in[0,1]$ に対し、$\psi(\alpha)=0$ であるとする。このとき $\sigma$ と $\tau$ とは逆関数の関係にある。

**定理 4** 任意の $\alpha\in[0,1]$ に対し、$\psi(\alpha)=0$ であるとする。このとき、すべての $\alpha$ に関する PLP-$\alpha$ の最適解 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ が一意的に定まるならば、$\sigma$ は連続である。

## 4 おわりに

本報告において、ファジィ線形計画問題(可能性線形計画問題)の代替問題に対して逆問題を定義した。代替問題とその逆問題の最適値関数は、それぞれ、制約式系に関わる可能性と(Zimmermann 流に言えば)目的関数の aspiration level をパラメータ(変数)とする関数であり、任意の $\alpha\in[0,1]$ が PLP-1 に適合しているならば、それらが互いの逆関数となることを導いた。また、適合性については幾つもの同値な条件件が存在していることを示した。

今後は $\mathrm{PLP}_U$-$(\alpha,\beta)$, $\mathrm{PLP}_U$-$(\alpha,\beta)$ に対しても同様な逆関係を構成する問題を定義し、 FLP そのものに対して逆問題を定式化する必要があろう。但し、本報告では言及しなかったが、本質的な問題として可能性変数(ファジィ数)間の順序関係がその定式化に深く関わってくるため、その点も研究すべきであると考えている。また $\alpha$-最適解の $\alpha$ に関する連続性についても集合値関数の観点から研究すべきであると考えている。

## 参考文献

[1] Kuwano, H., S. Sakai and S. Kushimoto, "The Possibility Distribution of $\alpha$-Optimal Value $\tilde{Z}(\alpha)$ in Fuzzy Linear Programming Problem", Math. Japonica, Vol.39, No.1, (1994), 137–145.



© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.