1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ファジイランダム変数を係数にもつ線形計画問題

02102914 大阪大学 *片桐 英樹 KATAGIRI Hideki
01005194 大阪大学 石井 博昭 ISHII Hiroaki
02003584 大阪大学 伊藤 健 ITOH Takeshi

1 はじめに

これまで、不確実または不確定な状況下における数理計画法として、それぞれ確率計画法、ファジイ数理計画法が考えられ、多くの研究がなされてきた。これらは、それぞれの状況下で有効な意思決定法であるが、現実には不確実、不確定が混在する状況も多いと思われる。本研究ではそのような要素を表すためにファジイランダム変数を導入し，ファジイランダム変数を係数にもつ線形計画問題においてファジイマックス順序の概念を用いて、この状況下での意思決定法を提案する.

2 定式化

次のような線形計画問題を考える。

$$P_1 : \quad minimize \quad \mathbf{cx}$$
$$subject\ to \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq 0$$

ただし、$\mathbf{c}=(c_1,\cdots,c_n), \mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^t$, $\mathbf{b}=(b_1,\cdots,b_n)^t$とする。また、$\mathbf{A}$ は $m\times n$ 行列 $[a_{ij}]$ である。

いま、目的関数の係数 c_iを次のような L 型のメンバーシップ関数に制限されるファジイランダム変数 $C_i(\omega)$ とする。

$$\mu_{C_i(\omega)}(c_i) = \max\{L((c_i - d_i(\omega))/\gamma_i), 0)$$

ここで、L は型関数で次の条件を満たすとし、$C_i(\omega) = (d_i(\omega), \gamma_i)_L$ と表記する。

1. $L(x) = L(-x) \ \ \forall x \in \mathbf{R}$
2. $L(x) = 1 \ \ iff \ \ x = 0$
3. L は上で $[0,+\infty]$ 上で広義単調減少
4. $x_0 \doteq \inf\{x > 0 | L(x) = 0\}$ とおくとき、$0 < x_0 < +\infty$ が成り立つ。

ここでγ_iは正定数, $d_i(\omega)$ は平均ν_i, 階数 n の分散共分散行列 U をもつ多変量正規分布に従う確率変数とする。$\mu_{C_i(\omega)}$ は $d_i(\omega)$ に伴って確率変数となる。即ち、c_i のメンバーシップ値が確率的に変動することになる。

$y = \mathbf{cx}$ とすると拡張原理から、

$$\mu_{Y(\omega)}(y) = \sup_{y=\mathbf{cx}} \{\mu_{C_1(\omega)}(c_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{C_n(\omega)}(c_n)\}$$

これを計算すると目的関数は $\mathbf{x} \geq 0$ に対して

$$Y(\omega) = (\sum_i^n d_i(\omega)x_i, \sum_i^n \gamma_i x_i)_L$$

で表されるような L 型のファジイランダム変数 $Y(\omega)$ となる。

次にファジイマックス順序の定義を示す。

定義 2.1[3]
2 つのファジイ数 A, Bに対して

$$A \preceq B \Leftrightarrow \begin{cases} (a) & m \leq n \\ (b) & m \leq \exists c \leq n \\ & \text{ここで } c \text{ は} \\ & \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \ \ \forall x < c \\ & \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \ \ \forall x > c \end{cases}$$

m, n はそれぞれ、ファジイ数 A, Bの中心を表す。上の定義は表現は異なるが、Dubois-Prade が提案したファジイマックス順序 (fuzzy max order) と同値である。

定理 2.2[3]
2 つの L−ファジイ数 $A = (m, \alpha)_L, B = (n, \beta)_L$ に対して

$$A \preceq B \Leftrightarrow n - m \geq x_0|\alpha - \beta|$$

P_1に対する意思決定モデルはいくつか考えることができるが、ここでは紙面の都合上、確率最大化モデルと Pモデルを示す。

1. 確率最大化モデル

$$P_2 \ : \quad maximize \ \ P(Y \preceq F_0)$$
$$subject \ to \ \ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \ \ \mathbf{x} \geq 0$$

これは目的関数がある特定の$L-$ファジイ数$F_0 = (l_0, \delta_0)_L$以下になる確率をもち、この確率を最大にする決定変数xを求めるモデルである。目的関数はファジイマックス順序の概念より

$$P\left(l_0 - \sum_i^n d_i(\omega)x_i \geq x_0|\delta_0 - \sum_i^n \gamma_i x_i|\right)$$

となり正規分布の性質より

$$\frac{\sum_i^n d_i(\omega)x_i - \sum_i^n \nu_i x_i}{\sqrt{x^t U x}}$$

は標準正規分布$N(0,1)$に従う。よって、

$$\Phi\left(\frac{l_0 - \sum_i^n \nu_i x_i - x_0|\delta_0 - \sum_i^n \gamma_i x_i|}{\sqrt{x^t V x}}\right) \to 最大$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{l_0 - \sum_i^n \nu_i x_i - x_0|\delta_0 - \sum_i^n \gamma_i x_i|}{\sqrt{x^t V x}} \to 最大$$

($\Phi(\cdot)$はN(0,1)の分布関数)

よって、P_2は次のP_3に変換することができる。

$$P_3 \ : \quad maximize$$
$$\frac{l_0 - \sum_i^n \nu_i x_i - x_0|\delta_0 - \sum_i^n \gamma_i x_i|}{\sqrt{x^t V x}}$$
$$subject \ to$$
$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \ \ \mathbf{x} \geq 0$$

このモデルは分数計画法の手法を用いて解くことができる。

2. Pモデル

$$P_4 \ : \quad P(Y \preceq F) \geq \alpha$$
$$subject \ to \ \ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \ \ \mathbf{x} \geq 0$$

これは確率レベルα一定のもとで基準のファジイ数$F = (l, \delta_0)_L$を小さくする決定変数$\mathbf{x}$を求めるモデルである。この場合、基準値のファジイ数の幅δ_0は決めておいて、中心lを最小にする。

ファジイマックス順序の概念を用いると制約式は次のようになる。

$$l - \sum_i^n \nu_i x_i - K_\alpha \sqrt{x^t U x} - x_0|\delta_0 - \sum_i^n \gamma_i x_i| \geq 0$$
$$(K_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha))$$

基準のファジイ数の幅δ_0を決めておくと最小のlは

$$l = \sum_i^n \nu_i x_i + K_\alpha \sqrt{x^t U x} + x_0|\delta_0 - \sum_i^n \gamma_i x_i|$$

よって、P_4は次の問題P_5に変換される。

$$P_5 \ : \quad minimize$$
$$\sum_i^n \nu_i x_i + K_\alpha \sqrt{x^t U x} + x_0|\delta_0 - \sum_i^n \gamma_i x_i|$$
$$subject \ to$$
$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \ \ \mathbf{x} \geq 0$$

$\alpha > \frac{1}{2}$のとき$K_\alpha > 0$であるから凸計画問題となる。

3 おわりに

P_1に対するその他の意志決定モデルや制約式にファジイランダム変数が含まれる場合の意思決定法に関しては当日の発表会で説明する予定である。なお、この研究は文部省科学研究費基盤研究(C)(2)08680460によるものであることを付記しておく。

参考文献

[1] R.Kruse & K.D.Meyer, "Statistics with vague data", D.Reidel Publishing Company(1987).

[2] 石井博昭, "「講座　数理計画法 10, 数理計画法の応用〈理論編〉」伊理正夫, 今野浩編, 第一章確率論的最適化" 産業図書 (1982).

[3] N.Furukawa."A parametric total order on fuzzy numbers and a fuzzy shortest route problem ". Optimization 10 367-377 (1994).

[4] A.Kaufmann & M.M.Gupta. "Introduction to fuzzy arithmetic : Theory and application. Van Nostrand Reihnhold, New York(1985).