

## 0-1 型混合整数計画問題に対する近似解法

奈良先端科学技術大学院大学 向井 くみこ MUKAI Kumiko  
 京都大学工学研究科 \*巽 啓司 TATSUMI Keiji  
 京都大学工学研究科 福島 雅夫 FUKUSHIMA Masao

## 1 はじめに

0-1 型混合整数計画問題を 2 段階問題に定式化し, 上位レベルの非線形 0-1 計画問題に対して信頼領域法 [2] に基づく降下法を提案する. この方法では, 各反復において 0-1 二次計画問題を解く必要があるが, 本報告では Hopfield ネットワーク [1] に基づく近似解法を適用する. しかし通常の Hopfield ネットワークを用いた場合, 好ましくない局所最適解に捕捉される可能性が大きい. そこで本報告では, その様な局所最適解への停留を避けるため, 状態遷移によって現在の解が改善されない場合でも別の状態へ“仮遷移”をするような遷移規則を提案し, その有効性を明らかにする.

## 2 定式化

次の 0-1 型混合整数計画問題を考える.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + d^T y + \frac{1}{2} y^T Q y \\ \text{s.t.} \quad & Ax + By \leq e \\ & Kx = l \\ & Gy \leq h \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned} \quad (1)$$

ただし,  $Q$  は正定値対称行列である. ここで

$$F(x) := \min_y \{d^T y + \frac{1}{2} y^T Q y \mid Ax + By \leq e, Gy \leq h\}$$

とおくと,  $F(x)$  は微分可能な非線形凸関数であり, この関数を用いて問題 (1) は次のように再定式化できる.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + F(x) \\ \text{s.t.} \quad & Kx = l \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned} \quad (2)$$

問題 (2) をペナルティ法を用いて, 次の制約なし問題に変換する.

$$\begin{aligned} \min \quad & E(x) := c^T x + M \|Kx - l\|^2 + F(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \{0, 1\}^n \end{aligned} \quad (3)$$

ただし,  $M$  は十分大きな正定数とする. 以下では, 問題 (3) に対する近似解法を考察する.

## 3 アルゴリズム

現在の反復点  $x^{(k)}$  が与えられたとき, その点において  $F(x)$  を一次近似して部分問題

$$\begin{aligned} \min \quad & \hat{E}^{(k)}(z, \alpha) := c^T z + \nabla F(x^{(k)})(z - x^{(k)}) \\ & + F(x^{(k)}) + M \|Kz - l\|^2 + \alpha \|z - x^{(k)}\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & z \in \{0, 1\}^n \end{aligned} \quad (4)$$

を構成する. ただし, 新たなペナルティ項  $\alpha \|z - x^{(k)}\|^2$  は, 部分問題の解と現在の点  $x^{(k)}$  との距離が大きくなりすぎるのを防ぐ目的で導入している. これにより, 近似精度の信頼性を保つことができる. さらにここでは, 非線形最適化においてよく知られた信頼領域法 [2] の考え方を用いて, ペナルティ係数  $\alpha$  の値を適応的に調節する方法を採用する.

第  $k$  反復において, ある  $\alpha$  に対して得られた部分問題 (4) の解  $z^*$  について

$$\Delta \hat{E}^{(k)}(z^*, \alpha) := \hat{E}^{(k)}(z^*, \alpha) - \hat{E}^{(k)}(x^{(k)}, \alpha) = 0 \quad (5)$$

が成り立つとき,  $\alpha$  の値が十分小さければ計算を終了し, 現在の点  $x^{(k)}$  を問題 (3) の近似解とする. また,  $\alpha$  より小さい  $\alpha'$  に対して得られる部分問題 (4) の解  $z^{**}$  について

$$\Delta \hat{E}^{(k)}(z^{**}, \alpha') < 0 \quad (6)$$

$$\Delta E(z^{**}, x^{(k)}) := E(z^{**}) - E(x^{(k)}) \geq 0 \quad (7)$$

が成り立つときも, 現在の点  $x^{(k)}$  を問題 (3) の近似解として計算を終了する.

以上の議論をまとめると次のアルゴリズムを得る.

## 問題 (3) に対するアルゴリズム

**Step1:(初期化)** 各定数  $0 < \mu < 1$ ,  $0 < \gamma_2 < 1 < \gamma_1$ ,  $M > 0$ ,  $\epsilon > 0$  と,  $\alpha > 0$  の初期値,  $x$  の初期解  $x^{(0)}$  を選び,  $k := 0$ ,  $\sigma := 0$  とする.

**Step2:(部分問題の構成と求解)**  $x^{(k)}$  を初期解とし, 部分問題 (4) の近似解  $z^*$  を求める.

$\Delta \hat{E}^{(k)}(z^*, \alpha) < 0$  なら Step4 へ.

$\Delta \hat{E}^{(k)}(z^*, \alpha) = 0$  なら Step3 へ.

**Step3:(終了条件チェックまたはその準備)**

$\alpha < \epsilon$  なら,  $x^{(k)}$  を問題 (3) の近似最適解とし, 計算を終了する.  $\alpha \geq \epsilon$  なら,  $\alpha := \gamma_2 \cdot \alpha$ ,  $\sigma := 1$  として Step2 へ.

#### Step4:( $\alpha$ の調整と反復点の更新)

$r := \Delta E(\mathbf{z}^*, \mathbf{x}^{(k)}) / \Delta \hat{E}^{(k)}(\mathbf{z}^*, \alpha)$  を計算する.

**Case1:**  $r \geq \mu$  なら,  $\alpha := \gamma_2 \cdot \alpha$ ,  $\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{z}^*$  とする.

**Case2:**  $0 < r < \mu$  なら,  $\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{z}^*$  とする.

**Case3:**  $r \leq 0$ ,  $\sigma = 0$  なら,  $\alpha := \gamma_1 \cdot \alpha$ ,  $\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{x}^{(k)}$  とする.

**Case4:**  $r \leq 0$ ,  $\sigma = 1$  なら,  $\mathbf{x}^{(k)}$  を問題 (3) の近似解として, 計算を終了する.

$k := k + 1$ ,  $\sigma := 0$  として Step2 へ.

ここで  $\sigma$  は (5) 式が成立しているかどうかを表すフラグの役割を果たしている. 特に, Step4 の Case4 は, 先に述べた終了条件 (6)(7) に対応している.

部分問題 (4) は 0-1 二次計画問題であるので Hopfield ネットワークを用いて近似解を求めることができる.

## 4 部分問題の解法

Hopfield ネットワークとは相互結合型ニューラルネットワークのひとつであり, 自己結合は存在せず ( $w_{ii} = 0$ ), 相異なるすべての素子間  $i, j$  に対称結合が存在する ( $w_{ij} = w_{ji}$ ). ただし,  $w_{ij}$  は素子  $i, j$  間の結合係数を表している. Hopfield ネットワークの動作は, 次式で定義されるエネルギー関数の最小点を求める一種の局所探索法とみなすことができる.

$$\hat{E}(\mathbf{z}) := \frac{1}{2} \mathbf{z}^T W \mathbf{z} - \theta^T \mathbf{z} \quad (8)$$

ただし,  $W$  は  $w_{ij}$  を要素とする  $n \times n$  行列,  $\theta$  は素子  $i$  の閾値  $\theta_i$  を要素とする  $n$  次元ベクトルである. すなわちネットワークの動作は, ある状態遷移規則に従いハミング距離 1 の状態間遷移を繰り返すもので, 常にエネルギーが増加しないことが保証されている. その結果得られる停留状態は, ハミング距離 1 を近傍とする  $\hat{E}$  の局所最小点となる.

制約付き組合せ最適化問題に Hopfield ネットワークを適用する場合, 一般に制約条件はペナルティ項としてエネルギー関数  $\hat{E}(\mathbf{z})$  に組み込まれるため, 通常の Hopfield ネットワークを用いて得られた解は, 単に元の問題の実行可能解であること以上は期待できない場合が多い. そこで本報告では, そのような状態に停留することなく, よりよい解を探索できるように, ハミング距離 2 までの状態間遷移 [3] を採用するとともに, さらに“仮遷移”を含む新たな遷移規則を提案する. これは, ハミング距離 2 以下の状態への遷移によって現在の解が改善できない場合でも, そのような状態への“仮遷移”を繰り返すことにより, よりよい解を見つけようとするものである. この遷移規則は 組み合わせ最適化問題に対する局所探索法の一つである variable depth method [4] の考え方に

基づいている. この手続きを具体的に記述するために, Hopfield ネットワークの各状態  $\mathbf{z}$  に対して, 素子  $i, j$  に関する近傍  $N_{ij}$  を次式で定義する.

$$N_{ij}(\mathbf{z}) := \{\mathbf{z} \mid z_k = \bar{z}_k (k \neq i, j), \mathbf{z} \in \{0, 1\}^n\}$$

部分問題 (4) に対するアルゴリズム

**Step1:**  $\mathbf{t}^{(0)} := \mathbf{z}$ ,  $l := 0$ ,  $s := 0$ ,  $p := 0$  とし, 定数  $L_{max}$ ,  $S_{max}$ ,  $P_{max}$  を設定する.

**Step2:** 適当にふたつの素子  $i, j (i \neq j)$  を選ぶ.

**Step3:**  $\mathbf{t}^{(s+1)} := \arg \min \{\hat{E}(\mathbf{t}) \mid \mathbf{t} \in N_{ij}(\mathbf{t}^{(s)}), \mathbf{t} \neq \mathbf{t}^{(s)}\}$  を求める.

**Step4:**

if  $\hat{E}(\mathbf{t}^{(s+1)}) < \hat{E}(\mathbf{z})$

$\mathbf{z} := \mathbf{t}^{(s+1)}$ ,  $l := l + 1$ .

if  $l \geq L_{max}$  then  $\mathbf{z}$  を解として終了.

else  $\mathbf{t}^{(0)} := \mathbf{z}$ ,  $s := 0$ ,  $p := 0$ , として

Step2 へ.

else if  $s \geq S_{max}$

if  $p \geq P_{max}$  then  $\mathbf{z}$  を解として終了.

else  $\mathbf{t}^{(0)} := \mathbf{z}$ ,  $s := 0$ ,  $p := p + 1$  として

Step2 へ.

else  $s := s + 1$  として Step2 へ.

この手続きの中の  $L_{max}$  は本遷移回数の上限,  $S_{max}$  は仮遷移による探索の深さの上限,  $P_{max}$  は一連の仮遷移による探索を何回まで行うかを表すパラメータである.

## 5 おわりに

このアルゴリズムをある工場配置問題に対して適用し, 実際に計算機実験を行ってその有効性を検証した. なお詳細は当日発表する.

## 参考文献

- [1] J.J. Hopfield, D.W. Tank: “Neural Computation of Decisions in Optimization Problems,” *Biological Cybernetics*, Vol. 52, pp. 141-152, 1985.
- [2] 茨木, 福島: 最適化の手法, 共立出版, 1993.
- [3] 大谷, 相吉: “多入力多出力ニューロンによる多次元的状態遷移の原理と組合せ最適化への応用”, 計測自動制御学会論文集 Vol. 32, No. 2, pp. 231-240, 1996.
- [4] C.H. Papadimitriou, K. Steiglitz: *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, New Jersey, 1982.