実係数の０－１ナップザック問題を最大価値経路問題に帰着させて解く方法

０１５０４３６４　近畿大学・商経学部　　林　芳男　HAYASHI Yoshio

（本文）ｎを任意に与えられた自然数とする。それぞれ重み、価値と呼ばれる正の実数の対 (w_j, p_j) を属性として持つｎ組の対象物（ｊ＝１，２，…，ｎ）を重さの総和の制限が正の実数Ｍであるナップザックに価値の総和が最大になるように入れるという 0-1 ナップザック問題を考える。求めたいのは

$$f(M) \triangleq \mathrm{Max}\,\{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} : \mathbf{w}\cdot\mathbf{x} \leqq M,\ x_j = 0 \text{ 又は } 1\ (j=1,2,\cdots,n)\}$$

の値と対応する解 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ である。ここに、$\mathbf{p} \triangleq (p_1, p_2, \cdots, p_n)$, $\mathbf{w} \triangleq (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ で・は内積である。$f(\cdot)$ はその 0-1 ナップザック問題の 0-1 ナップザック関数である。

それらの係数がすべて整数であるとき、Fulkerson (1966) はこの問題が頂点の数が（ $n(M+1)+2$ ）個の閉路を含まないネットワークの最長経路を求める問題として定式化できることを示している。また、その問題は DP の方法で $O(nM)$ の計算複雑度で解けることも分かっている。しかし、それらの係数が実数であるとき、そのようなアプローチは、頂点に来るものが不明であるし DP の方法でも右辺の数をメッシュに刻むその細かさが前もって分からないから、もはや機能しない。ここでは重み係数ベクトルｗの作る重みの集合 $\Phi_w \triangleq \{\mathbf{w}\cdot\mathbf{x} : \mathbf{x}$ は 0-1 ベクトル$\}$ を考えることにより表題の方法で Dijkstra (1959) と類似な方法で解く。ダイクストラの方法ではネットワークの全体が最初から与えられており各反復で唯一つの頂点が仮ラベルから永久ラベルに変わっていくのに対し、ここで提案する方法では全体のグラフは最初には与えないで計算の各反復で 0-1 ナップザック関数 $f(\cdot)$ の不連続点の候補だけが順番に生成されていき大体二つの頂点が仮ラベルから永久ラベルに変わっていくという特徴を持っている。

考えるグラフは頂点の集合が重みの集合 Φ_w で、その任意の二つの重み W_r, W_s に対応する頂点の間には、重み W_r を構成する一組の重み係数の中に入ってこない重み係数 w_j を使って $W_s = W_r + w_j$ とできるとき W_r から W_s への価値が p_j の枝が存在するというものである。このグラフをその与えられた 0-1 ナップザック問題の **0-1 ナップザック・ネットワーク**と呼ぶことにする。0-1 ナップザック・ネットワークは「重さ」を「長さ」と言い換えてやると、頂点０からの長さ(=経路上の枝の長さの総和)がその頂点を表す数になるグラフである。また、どの経路も枝の総数はｎ以下で同じ変数(による枝)は決して繰り返し現れ

ない。頂点０はそこから枝が出るだけの頂点であり、頂点 w・1 はそこに枝が入ってくるだけの頂点で頂点０からそこまでの枝の数はｎである。

計算の準備として変数を二つの基準で順序付ける。一つは重さで小から大へと並べる。タイのときは（価値/重さ）の比率の大きい方を先に持ってくる。もう一つは（価値/重さ）の比率で大から小へと並べる。タイのときは重さの小さい方を先に持ってくる。生成される頂点は（W，P，j）の三組で表され、最初の要素Wはその頂点を表す数、第二の要素Pは関連する価値で頂点０からその頂点Wへの経路で使われている変数の価値の総和を表し、第三の要素ｊは直前の親からその頂点Wへの変数の添字である。永久ラベルの頂点の集合Pは最初（０，０，０）だけから成り、それからｎ個の変数を使って（w_j，p_j，j）（j＝1，２，…，n）を生成し仮ラベルの頂点の集合Tの中に入れる。その際、準備段階の変数の並べ替えをすれば良い。また、Tの中でその二つの基準でヒープを形成する。尚、重さが等しい頂点は価値の大きい方だけを残し、残りは捨てる。このことは計算の反復の中でTに新しい要素が追加される度にヒープの再構成と伴に行なう。重さの順序によるヒープは通常のダイクストラの方法の中で最小の要素を要領よく行なうために使い、もう一つの（P/W）の順序によるヒープは計算の加速に使う。

先ず、Tの中で重さ最小の頂点W^*を求めそれを永久化する。その際、Tの中でP^*以下の価値の頂点は捨てる。（そのような頂点は f（・）の連続点になるからである。）そして（価値/重さ）の比率の順序でj^*よりも小さいすべての添字ｋを使った重さの頂点（W^*+w_k，P^*+p_k，k）を生成しTの中で二つのヒープを更新する。以上のことをM以下の最大の不連続点が永久化されるまで繰り返す。（Mより大きな不連続点が永久化されたら終わる。）各反復で、Tの中で（P/W）の比率最大のものW^{**}も永久化でき、そこからも同様に（価値/重さ）の比率の順序でj^{**}よりも小さいすべての添字ｋを使った重さの頂点（$W^{**}+w_k$，$P^{**}+p_k$，k）を生成しTに追加してもよい。ここで永久化された頂点の重さがMより大きいからと言って計算を終了させることは早計であることは注意しなければならない。この永久化は少しは計算の加速に役立つものと思っている。

以上の手続きで問題が解けることは勿論証明しなければならない。