1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

捜索経路制約のある場合のマルコフ型移動目標捜索問題

1504810 防衛大学校　*宝崎隆祐　　1000890 防衛大学校　飯田耕司

1．はじめに

捜索者の取り得る経路に制約がある場合，離散時間，離散空間及び離散捜索量の移動目標捜索問題は，目標の探知確率といった比較的簡単な評価尺度に関してさえＮＰ完全であることが知られている．この問題に関して，いくつかの経路を目標がある確率法則で選択する場合（経路型移動目標という），探知確率を最大にする最適捜索経路を求める解法をStewart[1], Eagle[2] らが提案している．さらに，目標価値や捜索コストを考慮した場合の期待利得最大化のための解法をHohzaki and Iida[3] が提案した．離散的にマルコフ移動する目標に対しては，目標の取り得るすべての経路を列挙し，それぞれの経路を目標がとる確率を遷移確率行列によって計算すれば経路型目標問題に帰すことはできるが，実際の計算に際しては記憶容量や計算時間の面で極めて非効率的であり，実行可能ではない．以上のことから，マルコフ型移動目標に対する期待利得尺度の最適捜索計画を効率的に求められるように，Hohzaki and Iida[3] の算法を拡張することが，本研究のねらいである．

2．モデルの記述と定式化

以下のようなマルコフ型移動目標を仮定した捜索を考える．

(1) 離散時間$\boldsymbol{T}=\{1,\cdots,T\}$において，セルで表現される離散空間$\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,K\}$上を目標は移動し，捜索者はセルを調査（ルック）することにより目標の探知に努める．(2) セルiに存在する目標をルックにより探知する確率は$p_i=1-\exp(-\alpha_i)$（ただし，$\alpha_i>0$）であるとする．(3) 時刻1での目標の初期存在確率分布は$\{p_0(j)\mid j\in\boldsymbol{K}\}$（ただし，$\sum_{j=1}^{K}p_0(j)=1$）である．(4) 時刻$t$でセル$i$に存在する目標が次の時点でセル$j$に移動する遷移確率は$\Gamma_t(i,j)$である．(5) 捜索者は時刻$t=0$にセル$s$をスタートし，移動しながら目標の探知に努めるが，セルiからはセル群$I(i)$へしか移動できない．(6) 時刻t，セルiで目標を探知した場合には，捜索者はtに関する非増加関数である価値$V(t)$を獲得できるが，ルックには捜索コスト$c_0(i,t)$を要する．(7) 捜索者は，期待利得（期待獲得価値から期待所要コストを引いたもの）を最大にする捜索経路を求めたい．

ここで，捜索者の経路に関する次の変数を定義する．

$$\varphi(i,t)=\begin{cases}1, & \text{捜索者が時刻 } t \text{ でセル } i \text{ に移動するとき}\\ 0, & \text{捜索者が時刻 } t \text{ でセル } i \text{ に移動しないとき}\end{cases} \tag{1}$$

さらに，Reach Matrix, Survive Matrixと呼ばれる次の確率を定義する．

- $U_{jt}(\varphi)$：捜索計画$\{\varphi(i,\tau)\mid i\in\boldsymbol{K},\tau\in\boldsymbol{T}\}$に対し，目標が探知されずに時間$t$，セル$j$に到達する確率
- $Q^{\tau}_{jt}(\varphi)$：時間t，セルjに存在している目標が，捜索計画$\{\varphi(i,\xi)\mid i\in\boldsymbol{K},\xi\in\boldsymbol{T}\}$に対して，時刻$\tau$まで探知されずに残る確率（ただし，$t\le\tau$）

これらの確率は，その意味から次の漸化式によって計算できる．

$$U_{j1}(\varphi)=P_0(j)\ ,\ U_{jt}(\varphi)=\sum_{i\in\boldsymbol{K}}U_{it-1}(\varphi)\exp(-\alpha_i\varphi(i,t-1))\Gamma_{t-1}(i,j)\quad j\in\boldsymbol{K},\quad t=2,\cdots,T \tag{2}$$

$$Q^{\tau}_{j\tau}(\varphi)=1\ ,\ Q^{\tau}_{jt}(\varphi)=\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\Gamma_t(j,i)\exp(-\alpha_i\varphi(i,t+1))Q^{\tau}_{it+1}(\varphi)\quad j\in\boldsymbol{K},\quad t=1,\cdots,\tau-1 \tag{3}$$

ここで便宜上、第８の仮定「(8) 時刻Tで非探知となったすべての目標物は，次の時刻$T+1$においてあるセルeに集まる.」をおく．$[1,t]$間の探知確率は$P_t(\varphi)=1-\sum_{i\in\boldsymbol{K}}U_{it+1}(\varphi)$で表わされるので，$[1,T]$間の期待利得$R_T(\varphi)$は次式で与えられる．

$$R_T(\varphi)=V(T)(1-U_{eT+1}(\varphi))+\sum_{\tau=1}^{T-1}(\Delta C(\tau,\varphi)-\Delta V(\tau))\left(1-\sum_i U_{i\tau+1}(\varphi)\right)-C(T,\varphi)\ . \tag{4}$$

ただし，

$$\Delta C(\tau,\varphi)=\sum_{i=1}^{K}c_0(i,\tau+1)\varphi(i,\tau+1),\ \Delta V(\tau)=V(\tau+1)-V(\tau),\ C(t,\varphi)=\sum_{\tau=1}^{t}\Delta C(\tau-1,\varphi)\ .$$

以上から，上述の問題は次のような整数計画問題に定式化される．

$$(P0)\quad \max_{\varphi}\quad R_T(\varphi) \tag{5}$$

$$s.t.\ \sum_{i=1}^{K}\varphi(i,t)=1,\qquad t=1,\cdots,T, \tag{6}$$

$$\varphi(i,t)\le\sum_{j\in I(i)}\varphi(j,t+1),\qquad i=1,\cdots,K,\quad t=0,\cdots,T-1, \tag{7}$$

$$\varphi(i,t)=\{0,1\},\qquad i=1,\cdots,K,\quad t=1,\cdots,T. \tag{8}$$

3．分岐限定法と上界評価

問題(P0)に対する解法として分岐限定法を用いる．そこで使用する解の木として，捜索者のすべての経路を羅列するように，{時刻$t=0$，セルs}をルート・ノードとして持つ以下のような木構造とする．時刻tでの捜索者のセルjを表すノード$\{t,j\}$に連接するノードは，時刻$t+1$での移動可能セル群$I(j)$によって構成する．この木上での時刻1のあるノードから時刻tのあるノードまでの連鎖によって捜索者のたどる部分経路が表されるが，これにより時刻tまでの目標探知確率$P_t(\varphi)$及び期待利得$R_t(\varphi)$が計算できる．これらと，時刻t以降の捜索による期待利得$R_B(\varphi)$との間には，$R_T(\varphi)=R_t(\varphi)+(1-P_t(\varphi))\cdot R_B(\varphi)$ の関係があり，$R_B(\varphi)$の上界$\widehat{R_B}$が推定できれば，捜索全体の期待利得の上界 $\widetilde{R_T}$が $\widetilde{R_T}=R_t(\varphi)+(1-P_t(\varphi))\cdot\widehat{R_B}$ で評価可能である．

$\widehat{R_B}$の評価の基本式を与える(P0)の緩和問題として，制約式(6)~(8)を $\sum_i\varphi(i,t)=1,\ \varphi(i,t)\ge 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\boldsymbol{T}$ で緩和した問題を考えると，その解は以下の定理で与えられる．

定 理 1　$\{\varphi^*(i,t)\}$が最適であるための必要十分条件は，$\forall i,t$に対し，

$$\varphi^*(i,t)>0\Longrightarrow A_{it}^T(\varphi^*)=\lambda(t), \tag{9}$$

$$\varphi^*(i,t)=0\Longrightarrow A_{it}^T(\varphi^*)\le\lambda(t) \tag{10}$$

となる$\{\lambda(t)\ge 0,\ t=1,\cdots,T\}$が存在することである．ただし，

$$A_{it}^T(\varphi)=E_{it}(\varphi)\cdot\exp(-\alpha_i\varphi(i,t))\cdot U_{it}(\varphi)-F_{it}(\varphi)\ , \tag{11}$$

$$E_{it}(\varphi)=\alpha_i\left\{V(T)Q_{it}^T(\varphi)+\sum_{\tau=t}^{T-1}(\Delta C(\tau,\varphi)-\Delta V(\tau))Q_{it}^{\tau}(\varphi)\right\}\ , \tag{12}$$

$$F_{it}(\varphi)=c_0(i,t)\sum_j U_{jt}(\varphi)\ . \tag{13}$$

4．おわりに

ここで議論した問題は，捜索経路に制約がある経路型移動目標捜索問題の解法[3]を，マルコフ型移動目標捜索問題に拡張したものである．また，紙数の都合上数値例については発表会の席上で述べる．

参考文献

[1] Stewart, T.J., Experience with a Branch-and-bound Algorithm for Constrained Searcher Motion, in *Search Theory and Applications*, pp.247–253, Plenum Press, New York, 1980.

[2] Eagle, J.N. and Yee, J.R., An Optimal Branch-and-bound Procedure for the Constrained Path: Moving Target Search Problem, *Operations Research*, **38**(1), pp.110–114, 1990.

[3] Hohzaki, R., and Iida, K., Path Constrained Search Problem with Reward Criterion, *JORSJ*, **38**(2), pp.254–264, 1995.