# パーフェクト双向グラフに対する一般化安定集合問題とその多項式時間解法

01306430 電気通信大学　田村 明久 Akihisa TAMURA

## 1　はじめに

双向グラフ (bidirected graph) は、無向グラフを一般化したものである。双向グラフ $G=(V,E)$ は、頂点集合 $V$ と辺集合 $E$ から成り、各辺 $e\in E$ は2つの端点を持ち、さらに各端点では$+$または$-$の符号を持つグラフである。辺 $e\in E$ が頂点 $i\in V$ を端点として持つとき、$e$ は $i$ に接続するという。辺 $e$ の両端点が一致するときに $e$ は自己ループと呼ばれる。双向グラフの辺は、その両端点の符号パターンから3種類に分類できる: ここでは両端点で符号$+$を持つ辺を $(+,+)$-辺、両端点で$-$を持つものを $(-,-)$-辺、異なる符号を持つものを $(+,-)$-辺 (または $(-,+)$-辺) と呼ぶことにする。無向グラフはすべての辺が $(+,+)$-辺であるような特殊な双向グラフとみなすことができる。

$G=(V,E)$ を無向グラフとし、$\boldsymbol{w}=(w_i)_{i\in V}$ を頂点集合上の整数重みベクトルとする。最大重み安定集合問題は、$G$ の安定集合 $S$ の中で重みの和 $\sum_{i\in S}w_i$ を最大とするものを求める問題である。ここで安定集合とは $V$ の部分集合で任意の二要素間に辺が存在しないものである。この問題は双向グラフに自然に拡張でき、ここではそれを一般化安定集合問題と呼ぶことにする。最大重み安定集合問題は $\mathcal{NP}$-困難で、一般の無向グラフに対しては多項式時間解法は知られていない。しかし、幾つかの特殊なクラスに対しては多項式時間解法が知られていて、その一つにパーフェクト無向グラフがある ([1] を参照されたい)。一方、無向グラフのパーフェクト性は双向グラフに自然な形で拡張可能であり、次のような性質が成り立つ [2]。

**定理 1.** ある種の自然な仮定のもので、双向グラフ $G$ がパーフェクトである必要十分条件は、$G$ のすべての辺を $(+,+)$-辺に置き換えた無向グラフ $\underline{G}$ がパーフェクトである。

上記のことから、パーフェクト双向グラフに対して一般化安定集合問題が多項式時間で解けることが予想される。本発表の主題は、一般化安定集合問題がある無向グラフの最大重み安定集合問題に多項式時間で変換され、さらにこの変換がパーフェクト性を保存することを示すことでこの予想が正しいことを立証する。

重複をなるべく避ける意味でもパーフェクト双向グラフの定義などは省略するので本アブストラクト集の [3] を参照されたい。

## 2　一般化安定集合問題

$G=(V,E)$ を双向グラフとする。各頂点 $i\in V$ に $x_i$ という変数を対応させ、頂点 $i,j\in V$ に接続する辺のタイプに応じて次のような不等式を考える:

$$\begin{array}{rl} x_i+x_j\leq\ 1 & (+,+)\text{-辺のとき} \\ -x_i-x_j\leq -1 & (-,-)\text{-辺のとき} \\ x_i-x_j\leq\ 0 & (+,-)\text{-辺のとき} \end{array}$$

$G$ のすべての辺に対応した不等式からなる系を考え、この不等式系の解となる 0–1 ベクトルを $G$ の 0–1 解と呼ぶ。もし $G$ が無向グラフなら安定集合の指示ベクトルは $G$ の 0–1 解となり、逆も成り立つ。

与えられた双向グラフ $G=(V,E)$ と $V$ 上の整数重みベクトル $\boldsymbol{w}=(w_i)_{i\in V}$ に対して次のような問題を考える。

$$\text{最大化}\ \{\sum_{i\in V}w_ix_i \mid \boldsymbol{x}:G\text{ の 0–1 解}\} \qquad (2.1)$$

ここではこの問題を一般化安定集合問題と呼ぶ。明らかにこの問題は最大重み安定集合問題を特殊ケースとして含んでいる。

幾つかの異なる双向グラフが、(同一の 0–1 解集合を持つという意味で) 同じ一般化安定集合問題を定めることがある。このような双向グラフの中で標準的なものを考えるのは、議論をする意味でも問題を解くためにも有益である。詳細は省くが、与えられた双向グラフを次の二つの条件を満たすように、本質的に対応する一般化安定集合問題を変えることなく、多項式時間で変換可能である [4]。

推移性:　任意の二辺 $e_1=\{i,j\}$ と $e_2=\{j,k\}$ に対してこれらが $j$ で異なる符号を持つとき、$i,k$ に接続した辺 $e_3$ で両端点の符号が $e_1,e_2$ の符号と一致するようなものが存在する。

単純性:　自己ループや多重辺を持たない。

この二つの条件を満たす双向グラフを閉であると呼び、以下でのこのようなものを考える。

## 3　多項式時間解法

与えられた閉双向グラフ $G=(V,E)$ に対して、次のように定義される無向グラフ $\tilde{G}=(V^+\cup V^-,\tilde{E})$ を考える:

$$V^+\ =\ \{v^+\mid v\in V\}$$

$$\begin{aligned} V^- &= \{v^- \mid v \in V\} \\ \widetilde{E} &= \{\langle v^+, v^- \rangle \mid v \in V\} \cup \\ &\quad \{\langle u^\alpha, v^\beta \rangle \mid G \text{ に } u, v \text{ に接続する} \\ &\qquad (\alpha,\beta)\text{-辺が存在}\} \end{aligned}$$

$V^+, V^-$はVの二つのコピーであり、$\alpha, \beta$は+または−の符号であるとする。このとき次ような性質が成り立つ。

**定理 2.** 閉双向グラフ $G$ に対して、

$$G: \text{ パーフェクト } \Longleftrightarrow \widetilde{G}: \text{ パーフェクト}$$

**補題 3.** $\boldsymbol{x}$が $G$ の 0–1 解ならば、

$$y_{v^+} = x_v, \quad y_{v^-} = 1 - x_v \quad (v \in V)$$

として定義される $V^+ \cup V^-$上の 0–1 ベクトル$\boldsymbol{y}$は$\widetilde{G}$の (包含関係の意味で) 極大な安定集合の指示ベクトルである。

逆に$\boldsymbol{y}$が$\widetilde{G}$の極大な安定集合の指示ベクトルならば $V^+$への制限$\boldsymbol{y}_{V^+}$は $G$ の 0–1 解である。//

この補題から $G$ と$\boldsymbol{w}$に対する一般化安定集合問題 (2.1) は、以下のような問題と等価となる。

$$\text{最大化} \{\sum_{i \in V} w_i y_{i^+} \mid \boldsymbol{y} : \widetilde{G} \text{ の極大安定集合}\} \tag{3.1}$$

このままでは条件に '極大な' 安定集合という条件が入っている。(3.1) の '極大な' という条件を外した問題での最適な安定集合が必ずしも極大であるとは限らないが、次の性質を用いると問題 (3.1) を$\widetilde{G}$に対する最大重み安定集合問題に簡単に変換できる。

**補題 4.** 任意の $v \in V$に対して、$\widetilde{G}$の極大安定集合は $v^+$または $v^-$の一方のみを必ず含む。

ここで次のように定義される $V^+ \cup V^-$上の重みベクトル$\widetilde{\boldsymbol{w}} = (\widetilde{w}_i)_{i \in V^+ \cup V^-}$

$$\widetilde{w}_{v^+} = \begin{cases} w_v & (w_v \geq 0) \\ 0 & (w_v < 0) \end{cases}$$
$$\widetilde{w}_{v^-} = \begin{cases} 0 & (w_v \geq 0) \\ -w_v & (w_v < 0) \end{cases}$$

に対する$\widetilde{G}$上の最大重み安定集合問題

$$\text{最大化} \{\sum_{i \in V^+} \widetilde{w}_i y_i + \sum_{i \in V^-} \widetilde{w}_i y_i \mid \boldsymbol{y} : \widetilde{G} \text{ の安定集合}\} \tag{3.2}$$

を考える。補題 4から、(3.2) の目的関数値はちょうど$\sum\{-w_v \mid w_v < 0\}$ だけ (3.1) の目的関数値より大きい。さらに、$\widetilde{\boldsymbol{w}}$は非負ベクトルであるから、(3.2) には必ず最適となるような極大安定集合が存在し、(3.2) の任意の最適解から極大であるものを作るのも容易である。以上の問題変換、定理 2と最大重み安定集合問題に対する Grötschel-Lovász-Schrijver の多項式時間解法 [1] を組み合わせるとパーフェクト双向グラフに対する一般化安定集合問題は入力サイズの多項式時間で解けることが示せる。

**定理 5.** パーフェクト双向グラフに対する一般化安定集合問題は入力サイズの多項式時間で解ける。

## 4 おわりに

ここでは、次の二つのことを示した。

- 任意の一般化安定集合問題がある無向グラフの最大重み安定集合問題に変換できる。
- この変換はパーフェクト性を保存する。

第一の主張からこれら二つの問題は等価であるが、問題を定式化するためには一般化安定集合問題の方が最大重み安定集合問題よりも優れている。そのため、応用上は一般化安定集合問題で定式化を試みて最大重み安定集合問題に変換すると良いだろう。また、一見頂点数が倍になり問題が大きくなるように見えるが、$v \in V$に対して、$\widetilde{w}_{v^+}, \widetilde{w}_{v^-}$の少なくとも一方は 0 であり、このような頂点は (3.2) を解く際には取り除いても影響はない。すなわち、頂点数は変わらず、(問題が容易になったとは言えないが) むしろ辺数が減った問題となる。

## 参考文献


[1] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A. (1988), *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, Berlin.

[2] Ikebe, Y. T. and Tamura, A. (1996), "Perfect bidirected graphs," Report CSIM96–2, Department of Computer Science and Information Mathematics, University of Electro-Communications, Tokyo.

[3] 池辺淑子, 田村明久 (1997), "パーフェクト双向グラフ," 平成 9 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集, 九州大学.

[4] Johnson, E. L. and Padberg, M. W. (1982), "Degree-two inequalities, clique facets, and biperfect graphs," *Annals Discrete Mathematics*, **16**, 169–187.