2－D－9

1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

パーフェクト双向グラフ

01012660 東京理科大学　池辺 淑子 Yoshiko T. IKEBE *
01306430 電気通信大学　田村 明久 Akihisa TAMURA

1　はじめに

双向グラフ (bidirected graph) は、無向グラフを一般化したものである。双向グラフ $G=(V,E)$ は、頂点集合 V と辺集合 E から成り、各辺 $e\in E$ は二つの頂点をその端点としてを持ち、さらに各端点では+または−の符号を持つ。辺 e の両端点が一致するときに e は自己ループと呼ばれる。双向グラフの辺は、その両端点の符号パターンから3種類に分類できる: ここでは両端点で符号+を持つ辺を $(+,+)$-辺、両端点で−を持つものを $(-,-)$-辺、異なる符号を持つものを $(+,-)$-辺 (または $(-,+)$-辺) と呼ぶことにする。無向グラフはすべての辺が $(+,+)$-辺であるような特殊な双向グラフとみなすことができる。

本発表では、無向グラフで知られているパーフェクト性の概念を双向グラフに拡張し、パーフェクト無向グラフとパーフェクト双向グラフの関係を議論する。

2　双向グラフに対する不等式系と解集合

$G=(V,E)$ を双向グラフとする。各頂点 $i\in V$ に x_i という変数を対応させ、頂点 $i,j\in V$ に接続する辺のタイプに応じて次のような不等式を考える:

$$\begin{array}{rcl} x_i+x_j \le 1 & & (+,+)\text{-辺のとき} \\ -x_i-x_j \le -1 & & (-,-)\text{-辺のとき} \\ x_i-x_j \le 0 & & (+,-)\text{-辺のとき} \end{array}$$

G のすべての辺に対応した不等式からなる系を G の不等式系を呼ぶことにし、その不等式系の解を G の解と呼ぶことにする。以下では特に G の 0−1 解の集合に注目する。もし G が無向グラフならば、任意の 0−1 解はある安定集合の指示ベクトルあり、また逆も成り立つ。安定集合とは、V の部分集合で任意の二要素間に辺が存在しないものである。不等式の観点から $(+,-)$-自己ループは意味がないのでここではこのような自己ループは考えないことにする。

3　閉双向グラフ

一般には異なる双向グラフが同じ 0−1 解集合を持つため、このような双向グラフの中から標準的な双向グラフを定めると議論がしやすい。任意の二辺 $e_1=\{i,j\}$ と $e_2=\{j,k\}$ に対してこれらが j で異なる符号を持つとき、i,k に接続した辺 e_3 で両端点の符号が e_1,e_2 の符号と一致するようなものが存在するとき双向グラフが推移的であという。辺 e_3 に対応する不等式は e_1,e_2 に対応した不等式の和になっているので、与えられた双向グラフに対し、推移的になるように辺を加えても解集合は変化しない。このような推移的な双向グラフは頂点数に関する多項式時間で求まり、以下では推移的な双向グラフ G を考える。

双向グラフが自己ループや多重辺を持たないとき単純であるという。Johnson と Padberg [3] は 0−1 解集合を本質的に変更することなく与えられた双向グラフを推移的でかつ単純であるように変形する (幾つかの頂点を除く) かあるいは 0−1 解が存在しないことを断定することが頂点数に関する多項式時間で行なえることを示した。ここでは、推移的で単純な双向グラフを閉 (closed) であると呼び、標準的な双向グラフとして扱う。例えば単純無向グラフは閉である。閉双向グラフへの変形や閉双向グラフの性質については、紙面の関係上詳しくは記述できないため [3] を参考にして欲しい。ここでは、一つだけ閉双向グラフ G と G のすべての辺を $(+,+)$-辺に置き換えることで得られる無向グラフ $\underline{G}$ の関係を一つ紹介する。

定理 1 ([2]): 閉双向グラフ G と $\underline{G}$ は同数の 0−1 解を持つ。

4　双クリーク不等式

$G=(V,E)$ を閉双向グラフとする。V の交わりをもたない部分集合のペア (C^+,C^-) が以下の条件を満たすとき G の双クリーク (biclique) と呼ぶ:

(B1)　$C^+\cup C^-$ の二頂点間には辺が存在する
(B2)　$C^+\cup C^-$ の頂点 i,j を結ぶ辺 e について、もし $i\in C^+$ ならば e は i で+符号を持ち、もし $i\in C^-$ なら−符号を持つ。j についても同様。

もし G が無向グラフならば $(\emptyset,\{i\})$ であるような双クリーク以外では $C^-=\emptyset$ であり、これらは無向グラフのクリークと一致している。クリークは、

Vの部分集合で任意の二要素間に辺が存在するものである。条件 (B1) は、$C^+ \cup C^-$が$\underline{G}$でクリークになることを主張している。

さて双クリーク (C^+, C^-) に対応した以下のような不等式を考えよう。

$$\sum_{i \in C^+} x_i + \sum_{i \in C^-} (1 - x_i) \leq 1$$

これは (C^+, C^-) に対する双クリーク不等式と呼ばれている。双クリーク $(\emptyset, \{i\})$ に対する不等式は $x_i \geq 0$ であり、いわゆる非負制約である。G が無向グラフのときは、これ以外の双クリーク不等式は $C^- = \emptyset$ より、クリーク不等式と呼ばれるものになる。任意の安定集合と任意のクリークは高々一つしか頂点を共有しないので安定集合の指示ベクトルはすべてのクリーク不等式を満たす。同様に以下のことが成り立つ。

補題 2 ([3]): 閉双向グラフ G の任意の 0–1 解はすべての双クリーク不等式を満たす。

5 パーフェクト双向グラフ

パーフェクト双向グラフを定義する前に閉双向グラフ $G = (V, E)$ に対して二つの多面体 $P(G), Q(G)$ を次ぎように定義しよう。

$$\begin{aligned} P(G) &= \mathrm{conv}\{\boldsymbol{x} \in R^V \mid \boldsymbol{x} \text{ は } G \text{ の 0–1 解}\} \\ Q(G) &= \{\boldsymbol{x} \in R^V \mid \boldsymbol{x} \text{ は } G \text{ のすべての} \\ &\qquad \text{双クリーク不等式を満たす}\} \end{aligned}$$

ここで、convは凸包を意味する。すなわち $P(G)$ は G の 0–1 解全体の凸包である。補題 2から $P(G) \subseteq Q(G)$ が成り立ち、一般にこれらが一致するとは限らない。上記のことから G が無向グラフの場合は $Q(G)$ はすべてのクリーク不等式と各変数の非負制約で記述される多面体になる。ここでは本来のパーフェクト無向グラフの定義は省略するが、パーフェクトグラフには次のような多面体を用いた特徴付けが知られている。

定理 3 ([1]): 無向グラフ G がパーフェクトであるための必要十分条件は $P(G) = Q(G)$ である。

この特徴付けを利用して双向グラフに対するパーフェクト性を以下のように定義する。双向グラフが閉でありかつ $P(G) = Q(G)$ を満たすときパーフェクト (perfect) と呼ぶ。

Johnson と Padberg [3] は、閉双向グラフがパーフェクトであるための必要十分条件は$\underline{G}$がパーフェクトであることを予想した。本発表の主定理はこの予想が成立することを主張するものである。

定理 4 ([2]): G を閉双向グラフとする。

$$G : \text{パーフェクト} \Longleftrightarrow \underline{G} : \text{パーフェクト}$$

6 おわりに

紙面の都合上、定理 4の証明までは書けないが、最後にこの定理がそれほど自明ではないことの雰囲気だけでも伝えたい。定理 1から $P(G)$ と $P(\underline{G})$ はともに同じ数の端点を持っている。もし G がパーフェクトなら $Q(G), Q(\underline{G})$ に同様のことが言える。しかしその多面体の構造はかなり異なっている。極端な例では、$Q(G)$ は次元 $|V|$ (双向グラフが閉なら $\dim P(G) = |V|$ が知られている) に比例した数のファセットしか持たないが、$Q(\underline{G})$ は $|V|$ に関して指数的な数のファセットを持つような閉双向グラフ G が存在する。また定理 1の証明から一般的に $Q(G)$ のファセット数よりも $Q(\underline{G})$ のファセット数の方が同じか多いことが示せる (G が閉なら成り立ちパーフェクトでなくてもよい)。

証明に関しては、

$$G : \text{パーフェクト} \Longrightarrow \underline{G} : \text{パーフェクト}$$

の方が逆側を示すよりも難しい。

参考文献

[1] Chvátal, V. (1975), "On certain polytopes associated with graphs," *Journal of Combinatorial Theory (B)*, **18**, 138–154.

[2] Ikebe, Y. T. and Tamura, A. (1996), "Perfect bidirected graphs," Report CSIM96–2, Department of Computer Science and Information Mathematics, University of Electro-Communications, Tokyo.

[3] Johnson, E. L. and Padberg, M. W. (1982), "Degree-two inequalities, clique facets, and biperfect graphs," *Annals Discrete Mathematics*, **16**, 169–187.