2－D－8

1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

台形グラフの点彩色問題を解く並列アルゴリズム

02401223　徳島大学　＊中山愼一　NAKAYAMA Shin-ichi
01603863　豊橋技術科学大学　増山 繁　MASUYAMA Shigeru

1　はじめに

グラフ G の節点に対し，隣接するどの2節点も異なる色となるように着色することを G の彩色という．点彩色問題とは，与えられたグラフを最小の数の色で彩色することである．一般のグラフにおいて，点彩色問題は NP 困難であるということは良く知られている [4]．しかし，いくつかの制限されたクラスに属するグラフに対しては，多項式時間逐次アルゴリズムが存在する．ここで取り扱う台形グラフもそのようなクラスに属するグラフの一つである。台形グラフは，Dagan, Golumbic and Pinter [2] により提案された．彼らの研究動機は，VISI 設計におけるチャネル・ルーティングの階層割り当て問題を解くことであったが，台形グラフの点彩色問題を解くことで解決できることを示した．

本論文では，台形グラフの点彩色問題を CREW PRAM 上で $O(n^3/\log n)$ 個のプロセッサを用いて $O(\log^2 n)$ 時間で解く並列アルゴリズムを示す．

2　用語の定義

グラフ理論の基本的用語に関しては，文献 [1] に基づいているのでそちらを参照されたい．

まず，台形グラフについて述べる．　上部チャネル，下部チャネルと呼ばれる2つの平行な線が存在する．　それぞれのチャネルは，左から右に連続する整数値 $1,2,3,\cdots$ で番号付けされている．　台形 T_i とは，上部チャネル，下部チャネル上の4つの点 $[u_i^l,u_i^r,d_i^l,d_i^r]$ を角点 (corner point) として定義される (但し，u_i^l，u_i^r $(u_i^l < u_i^r)$ は上部チャネル上での点であり，d_i^l，d_i^r $(d_i^l < d_i^r)$ は下部チャネル上の点とする)．　本論文では，各台形 T_i の4つの角点 を $[u_i^l,u_i^r,d_i^l,d_i^r]$ で表す．上記のように表される幾何学的表現を台形ダイヤグラム (trapezoid diagram)T という．以下，混乱が生じない限り，台形ダイヤグラム T における台形の集合を T で表す．これを基に，台形に $T_1,T_2,T_3,\cdots,T_n$ と番号付けが可能であり，もし $u_i^r < u_j^l$ ならば $T_i < T_j$ とする．グラフ $G=(V,E)$ が台形グラフである必要十分条件は，次のような台形ダイヤグラム T が存在することである．

$V = \{\, i \mid i$ は台形 T_i に対応する $\}$

$E = \{\, \{i,j\} \mid i,j$ に対応する台形 T_i, T_j が交差している $\}$[2].

次に，無向グラフ G に対し G の各辺に向き付け F を行ない，有向グラフ $G^*=(V,F)$ を構成することを考える．有向グラフ G^* の各辺において，(x,y)，または，(y,x) のいずれか一方のみが F に存在する場合，G^* は反対称的 (antisymmetric) であるといい，また，(x,y)，$(y,z) \in F$ が存在すれば必ず $(x,z) \in F$ が存在する場合，G^* は推移的 (transitive) であるという．G の向き付けを行なうことにより，反対称的，かつ，推移的な G^* が構成可能ならば，G を比較可能グラフ (comparability graph) [3] という．台形グラフ G の補グラフ G^c には，常に反対称的，かつ，推移的な向き付け F が存在する．

最後に，幾何表現について述べる．平面上で点集合 S が与えられたとき，もし，2点 $a=(x_1,y_2)$，$b=(x_2,y_2) \in S$ において，$x_1 < x_2$，かつ，$y_1 < y_2$ ならば，a は b に支配されている（または，b は a を支配している）という．

3　並列アルゴリズム

グラフ G の彩色とは，G の点集合 V を独立部分集合 $\{V_1,V_2,\cdots,V_k\}$ に分割することである．これは，G の補グラフ G^c 上ではクリークに分割すること，つまり，クリーク被覆問題にあたる．本並列アルゴリズムでは，G^c 上での最小なクリーク被覆を求めることにより G の点彩色問題を解く．

2節で述べたように，台形グラフ G の補グラフ G^c は比較可能グラフである．つまり，G^c において反対称的，かつ，推移的な向き付け F が存在する．その向き付けされた有向グラフを G^* とする．推移的な向け付けにより次の補題が得られる．

［補題１］　G^* の路 $p=v_1,v_2,\cdots,v_l, l \geq 1$ 上の節点 $v_1,v_2,\cdots,v_l$ で構成される誘導部分グラフはクリークである．□

補題1より，G^c の最小クリーク被覆を求めるには，G^* の最小路被覆を求めればよい．よって，本並列アルゴリズムでは，G^* の最小路被覆を並列に求めるのだが，その前に G^c に対して反対称的，かつ，推移的な向き付けを行ない G^* を構成しなければならない．その構成について次に述べる．

G^* を構成するために，まず，台形ダイヤグラム T を用いて各台形 T_i，$i=1,\cdots,n$，を以下のように幾何表現する．各台形 $T_i=[u_i^l,u_i^r,d_i^l,d_i^r]$ に対し，平面

上に2つの点, 赤点 $r_i = (u_i^l, d_i^l)$, 青点 $b_i = (u_i^r, d_i^r)$ を置く. このような幾何表現を用いることにより, 次の補題が得られる.

[補題 2] 台形 T_j の赤点 r_j が台形 T_i の青点 b_i, $i \neq j$ を支配する必要十分条件は, 台形グラフ $G = (V, E)$ において台形 T_i, T_j に対応する節点 v_i, $v_j \in V$ が隣接していないことである. □ （証明略）

台形グラフを幾何表現したが, この表現から次のようにして有向グラフ G^* が得られる.

（1）まず, r_i が b_j, $i \neq j$ を支配しているならば, r_i と b_j を有向辺 (r_i, b_j) で接続する.

（2）各 r_k, b_k, $k = 1, \cdots .n$, において, r_k, b_k を1つの節点 v_k に同一視し, r_k, b_k の隣接点達を v_k に接続する.

[補題 3] 上述の方法で構成した有向グラフ $G^* = (V, F)$ は, $G = (V, E)$ の補グラフ $G^c = (V, E^c)$ に対し, 反対称的, かつ, 推移的な向き付け F を施したものである. □ （証明略）

G^* が得られたので, 次に G^* の最小路被覆を並列に求める方法について述べる. 有向グラフの最小路被覆について次の補題が知られている.

[補題 4] *[7]* 路被覆のサイズが最小になるための必要十分条件は, それがグラフの辺を最も多く含むことである. □

補題4により, 最も多くの辺を含むような路被覆を求めれば, 最小路被覆が求まる. 最も多くの辺を含む路被覆を得るために, 先に述べた台形グラフの幾何表現を利用し, 次に示す幾何的なマッチングを用いた.

• 平面2点マッチング (Matching between two planar point sets)

平面上において, 青点の点集合を B, 赤点の点集合を R とする. もし, 赤点 r が青点 b を支配しているならば, r と b はマッチされているという. 平面点集合マッチング問題とは, $R \cup B$ で最大マッチング M を求める問題である.

平面2点マッチング問題を $O(n^3/\log n)$ 個のプロセッサを用いて, $O(\log^2 n)$ 時間で解く効率の良い並列アルゴリズム[6] が存在するので, この問題を利用することにより, 並列に G^* の最小路被覆を求めることができる.

[補題 5] G^* の最小路被覆は, 台形グラフを前述した幾何表現にし, それに対し平面2点マッチング問題を解くことにより求まる. □ （証明略）

求まった最小路被覆を P_1, P_2, $\cdots$, $P_{l'}$, $l' \geq 1$ とすると, 各 P_i, $i = 1, \cdots, l'$, において, $P_i = v_1, v_2, \cdots, v_{i'}, i' \geq 1$, に属する節点 $v_j, j = 1, \cdots, i'$ が同一色になる. （G^* の節点と台形グラフ G の節点は同一であることに注意.）

以上をまとめると次のようになる.

Procedure **COLORING**
begin
(Step 1) 各台形 $T_i = [u_i^l, u_i^r, d_i^l, d_i^r]$ に対し, 平面上に2つの点, 赤点 $r_i = (u_i^l, d_i^l)$, 青点 $b_i = (u_i^r, d_i^r)$ を置く.
(Step 2) 平面2点マッチングを並列に求める.
(Step 3) マッチング M に属する各 $r_i b_j$, $i \neq j$ に対応する G^* の辺 (v_i, v_j) からなる路, および, 長さ0の路 v_l （これは, r_l, b_l 共に M に属していないときに生じる）を加えた路 P_1, P_2, $\cdots$, $P_{l'}$, $l' \geq 1$ が最小路被覆となる.
(Step 4) 各 P_i において, $P_i = v_1, v_2, \cdots, v_{i'}, i' \geq 1$, に属する節点 $v_j, j = 1, \cdots, i'$ に同一色を割り当てる.
end.

[定理 1] *Procedure COLORING* は台形グラフの点彩色問題を並列計算機モデル *CREW PRAM* 上で $O(n^3/\log n)$ 個のプロセッサを用いて, $O(\log^2 n)$ 時間で解く. □

参考文献

[1] J.A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph theory with applications, *The Macmillan Press Ltd.* (1980).

[2] I. Dagan, M. C. Golumbic and R. Y. Pinter, Trapezoid graphs and their coloring, *Discrete Applied Mathematics*, **21**(1988) 35-46.

[3] M. C. Golumbic, Algorithmic graph theory and perfect graphs, *Academic Press*, New York (1980).

[4] M. R. Garey and D. S. Johnson: *Computers and Intractability*, Freeman, San Francisco, CA (1979).

[5] J. JáJá, *An Introduction to parallel algorithms*, Addison-Wesley Publishing Company (1992).

[6] S. K. Kim, A parallel algorithm for finding a maximum clique of a set of circular arcs of a circle, *Information Processing Letters*, **34** (1990) 235-241.

[7] S. Noorvash, Covering the vertices of a graph by vertex-disjoint path, *Pacif. J. Math.*, **58** (1975) 159-168.