1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

分割行列の相似変換既約性の判定について

01011760　東邦大学　*伊藤 尚史　ITO Hisashi

1. はじめに

工学的あるいは物理的システムを分析・設計する際にはそれを記述する数学的枠組として線形代数を用いる事が多い. しかし, 行列というものはただ書き下しただけでは単なる数字の羅列に過ぎない. システムを深く理解する為には, 数字の羅列の裏に潜んでいる自然な変換群を把握する必要がある. そして, 自然な変換群によって移り変わる行列表示の中から, システムの隠れた階層構造を最も良く浮かび上がらせるものを'標準形'として選び出す事が重要であろう. 例えば, 相似変換の下では Jordan 標準形がこの観点の標準形として有名であり, また, 有向グラフの強連結成分分解も行列の添字集合 (行集合, 列集合) に作用する置換群の下での行列の標準形とみなす事ができる.

行列の行集合と列集合に分割が与えられている場合, その行列は **分割行列** と呼ばれる. 正方行列の添字集合に分割が与えられている場合, 分割に沿った相似変換を変換群と考えるのが自然である. この様な変換群の下での分割行列の標準形は既に Ito, Iwata and Murota [1][2][3] によって考察されており, ブロック上三角型の行列表示の存在や一意性などが論じられている. しかしながら上記論文では, 一般の分割行列が与えられた時に標準形を構成するアルゴリズムについては述べられていなかった.

本発表では, 特に, 代数閉体を成分とする正方行列で添字集合に分割が与えられている場合に関して, 「分割行列が既約である」, 即ち, 「分割に沿ったどんな相似変換を施しても真にブロック上三角型の行列表示にできない」という事を判定するアルゴリズムについて述べる.

2. 準備

体 F 上の n 次正方行列 A が

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\nu} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\nu 1} & A_{\nu 2} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

と分割されていたとする. ここで, $A_{\alpha\beta}$ は $n_\alpha \times n_\beta$ 行列であり, (α, β) 部分行列と呼ばれる. 後で便利な様に, (α, α) 部分行列が n_α 次の単位行列 I_{n_α} であり, 他の全ての部分行列は零であるような射影行列 Π_α $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$ を導入しておこう.

全ての非対角部分行列が零であるような, 即ち, $S\Pi_\alpha = \Pi_\alpha S$ $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$ を満たすような, 正則行列 S を用いた相似変換を「分割に沿った相似変換 (**P**artition-respecting **S**imilarity transformation)」(**PS 変換**) と呼ぶ. 分割行列 A に対して, 適当に PS 変換 $\tilde{A} = S^{-1}AS$ をまず施し, その後で適当な置換行列 P を使って $\overline{A} = P^{\mathrm{T}}\tilde{A}P$ を作る時, $\overline{A}$ が **ブロック上三角行列** になる様にしたい. 分割行列 A がどんな PS 変換とどんな置換行列を用いても, 決して (真に) ブロック上三角化されない時, 分割行列 A は **既約** であると言う.

3. 既約性判定アルゴリズム

次に述べるアルゴリズムが, 今回の成果である. このアルゴリズムは, 体 F が何であっても形式的には動くが, F が代数閉体の場合にだけ常に正しい結論を出し, そうでない場合には間違った結論を出し得る.

代数閉体 F 上の分割行列 A が既約であるかどうかは, 次のアルゴリズムで判定できる.
[Step 1]　$i := 1$ かつ $V^{(0)} := \{cI \mid I$ は n 次元単位行列, $c \in F\}$ とせよ.
[Step 2]　行列のなす F ベクトル空間 $V^{(i)} := \mathrm{span}\{AV^{(i-1)}, \Pi_\alpha V^{(i-1)} \mid \alpha = 1, \dots, \nu\}$ とせよ.
[Step 3]　$\dim V^{(i)} = n^2$ ならば, 分割行列 A は既約である.
[Step 4]　$\dim V^{(i)} = \dim V^{(i-1)}$ ならば, 分割行列 A は既約でない.
[Step 5]　$i := i + 1$ として, Step 2 へ.

このアルゴリズムを動かした時, 高々 $n^2 - 1$ 回しか Step 2–5 を繰り返さないことが示せる. 従って, 行列の大きさ n の多項式時間で既約性の判定が可能である事になる.

4. アルゴリズムの正当性の証明

PS 変換に纏わる問題を扱うに当たっては, 以下のような加群 $M = F^n$ を導入すると具合が良いということが知られている ([1][2][3]).

有限集合 $\Sigma = \{z_0, z_1, \dots, z_\nu\}$ の生成する自由な単位的半群を Σ^* とする. 体 F 上の半群環 $F\langle\Sigma^*\rangle$ の, n 次元 F ベクトル空間 F^n の要素 x への作用を

$$\begin{cases} z_0 x := Ax, \\ z_\alpha x := \Pi_\alpha x \quad (\alpha = 1, \dots, \nu) \end{cases}$$

で定義すると, $M = F^n$ は $F\langle\Sigma^*\rangle$ 加群となる.

アルゴリズムが正しく動く事を示すには, ここで定義した加群に対して, 次に述べる, 代数閉体上の有限次元線形環に関する Burnside の定理 (定理の証明は, 例えば山崎 [4] にある) を用いる.

Burnside の定理　代数閉体 F 上の有限次元線形環 R とする. R 加群 M が単純であるためには, $R_M = \mathrm{End}_F(M)$ が必要充分である. ただし, $\mathrm{End}_F(M)$ は M 上の F 線形写像の全体を表し, R_M は環 R の作用を $\mathrm{End}_F(M)$ の部分環と見たものを表す.

環 R として半群環 $F\langle\Sigma^*\rangle$ をとり, $M = F^n$ ととれば, アルゴリズムの正当性は直ちに示せる. また, アルゴリズムが多項式時間である事は, ベクトル空間に包含関係 $V^{(0)} \subseteq V^{(1)} \subseteq \cdots$ がある事を考慮すれば示せる.

必ずしも正方でない分割行列に対する標準形に関しても文献 [2][3] では考察されている. この場合の既約性の判定に関しても, 上で述べたアルゴリズムと同様のアルゴリズムがある事を最後に付言しておく.

文献

[1] 伊藤尚史, 岩田覚, 室田一雄, “分割行列の階層的分解 (I) — 相似変換,” 日本ＯＲ学会春季大会予稿集, 京都 (Mar. 1993), 1–D–7.
[2] 伊藤尚史, 岩田覚, 室田一雄, “分割行列の階層的分解 (II) — 同値変換,” 日本ＯＲ学会春季大会予稿集, 京都 (Mar. 1993), 1–D–7.
[3] H. Ito, S. Iwata and K. Murota, “Block-triangularizations of partitioned matrices under similarity / equivalence transformations,” *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15** (1994), 1226–1255.
[4] 山崎圭次郎, “環と加群,” 岩波基礎数学選書, 岩波書店.