1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

最小比閉路消去法とネットワーク最適化問題への適用

Univ. of British Columbia　McCORMICK S. Thomas
02201890　東京工業大学　*塩浦 昭義 SHIOURA Akiyoshi

1 はじめに

最小費用流問題に対し，様々な種類の負閉路消去法が提案されているが，その性能は消去する閉路の選び方に依存する．例えば，Weintraub [6] は費用と容量の積を最小にする閉路を消去するのに対し，Goldberg-Tarjan [1] は費用の平均を最小にする閉路を選ぶ．1989 年に Wallacher [4] が提案した方法は最小比閉路消去法 (以下，MRCC) と呼ばれ，ある種の比を最小にする閉路を各反復で消去する．最小比閉路の選択により，弱多項式回反復での終了が実現され，かつ，その解析も容易である．この種の最小比閉路を用いた算法は，劣モジュラ流問題に対しても良い結果を出しており，負閉路消去法として初めて弱多項式性を実現した [5].

本研究の目的は，単模線形空間上での線形計画問題に対して，MRCC を一般化することである．単模線形空間は，完全単模行列 A によって $\{x \in \mathbf{R}^E \mid Ax = 0\}$ と表せる線形空間である．ネットワークでの循環流集合は単模線形空間であり，単模線形空間上での線形計画問題は最小費用流問題の自然な一般化と見なせる．

次に，MRCC が最小費用流問題の主問題，双対問題の両方に対称的に適用出来ることを導く．双対問題自身は，MRCC を適用するには不適当な形をしている．このため，双対問題と等価な最小費用テンション問題を通じて適用可能性を示す．

最後に，MRCC が強多項式時間で終了するか否かについて議論する．MRCC は，[6] と [1] の中間に位置する算法と見られる．[1] は強多項式時間で終了するのに対し，[6] は必ずしも終了しない例をもつ [2]. 我々は，最小費用流問題及び最小費用テンション問題に対する反例を示すことで，この疑問に対する否定的な答を与える．

2 最小比閉路消去法

ここでは，単模線形空間上での線形計画問題

$$\text{(LPU) Min. } c^T x \text{ s.t. } Ax = 0,\ l \le x \le u$$

に対する MRCC を示す．ここで A は $n \times m$ $(m \geq 2)$ 完全単模行列とし，ベクトルの添字集合を E と記す．また，$c(j) \in \mathbf{R}$, $-l(j), u(j) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ $(j \in E)$ である．

$x \in \mathbf{R}^E$ を (LPU) の実行可能解とする．各 $j \in E$ に対し，残余容量 $r_x^+(j), r_x^-(j)$ を

$$r_x^+(j) = u(j) - x(j), \quad r_x^-(j) = x(j) - l(j)$$

と定める．$Ad = 0$ を満たす $d \in \{0, \pm 1\}^E$ に対し，その支持集合 $\{j \in E \mid d(j) \neq 0\}$ が極小なとき，d は閉路と呼ばれる．閉路 d の x に関する容量を

$$\mathrm{cap}_x(d) = \min[\min_{d(j)=+1}\{r_x^+(j)\}, \min_{d(j)=-1}\{r_x^-(j)\}]$$

と定義する．$c^T d < 0$ を満たす閉路 d は負閉路と呼ばれる．閉路 d の x に関する重みを

$$w_x(d) = \sum_{d(j)=+1} 1/r_x^+(j) + \sum_{d(j)=-1} 1/r_x^-(j)$$

とする．正の容量をもつ閉路の中で，$c^T d / w_x(d)$ の値を最小にするものを，x に関する最小比閉路と呼ぶ．MRCC は次のように記述される．

手順 0: 適当な実行可能解 x を求める．

手順 1: 正の容量をもつ負閉路がなければ終了．x は最適解．

手順 2: x に関する最小比閉路 d を求める．

手順 3: 実行可能解 x を $x' = x + \alpha d$ に変更 $(\alpha = \mathrm{cap}_x(d))$. 手順 1 へ戻る．

補題 1 x^* を (LPU) の最適解，x, x' をそれぞれ，現在及び次の反復の実行可能解とすると，$c^T(x' - x^*)/c^T(x - x^*) \leq 1 - 1/m$.

この補題により，MRCC の反復回数が算定できる．$U = \max\{\max_{l(j)>-\infty} |l(j)|, \max_{u(j)<+\infty} |u(j)|\}$, $C = \max |c(j)|$ とおく．

定理 2 入力 c, u, l が整数ベクトルならば, MRCC は $O(m\log(mCU))$ 回の反復で終了する.

最小比閉路は 強多項式時間で求められる. よって MRCC は弱多項式時間算法となる.

3 最小費用流問題への適用

ネットワークに対する最小費用流問題 (MCF) は (LPU) として定式化できる. この場合, 行列 A は有向グラフ $G=(V,E)$ の接続行列となる. ゆえに MRCC が適用でき, (MCF) は弱多項式回の反復で解かれる.

定理 3 ([4]) c, u, 及び l が整数ベクトルならば, $O(|E|\log(|V|CU))$ 回の反復で終了する.

しかし, 枝の容量が実数で与えられた場合には, MRCC が終了するとは限らない. 実際, 図 1 の例に対しては無限回の反復を要する. 従って, MRCC は強多項式時間解法ではないことが確かめられる.

4 最小費用テンション問題への適用

$G=(V,E)$ を有向グラフとする. 次の問題は最小費用テンション問題 (MCT) と呼ばれる:

$$\begin{aligned}
\text{Min.}\quad & \sum_{(i,j)\in E} c(i,j)(\pi(j)-\pi(i)) \\
\text{s.t.}\quad & l(i,j) \le \pi(j)-\pi(i) \le u(i,j) \quad ((i,j)\in E), \\
& \pi(i)\in \mathbf{R} \quad (i\in V).
\end{aligned}$$

ベクトル $(\pi(j)-\pi(i) \mid (i,j)\in E)$ はテンションと呼ばれ, 全てのテンションからなる集合は単模線形空間となる [3]. 従って, (MCT) に対しても MRCC を用いることができ, 特殊化された算法は, ある種の比を最小にするカットを毎回消去する. (MCT) は (MCF) の双対問題

$$\begin{aligned}
\text{Max.}\quad & \sum_{(i,j)\in E} \{l(i,j)\lambda(i,j)-u(i,j)\mu(i,j)\} \\
\text{s.t.}\quad & \pi(j)-\pi(i)+\lambda(i,j)-\mu(i,j) \\
& \qquad\qquad = c(i,j) \quad ((i,j)\in E), \\
& \lambda(i,j),\mu(i,j)\ge 0, \quad ((i,j)\in E), \\
& \pi(i)\in\mathbf{R} \quad (i\in V)
\end{aligned}$$

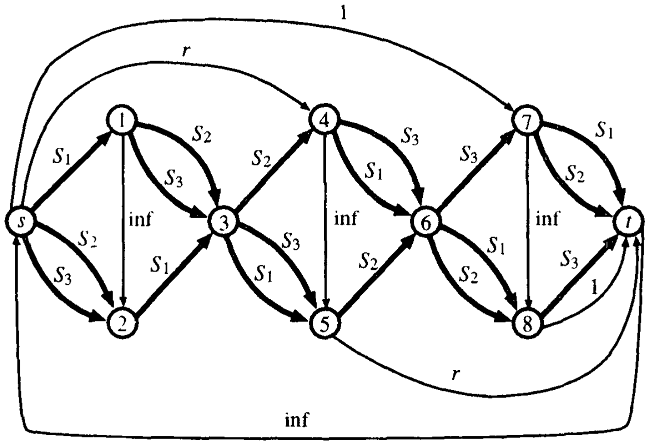

図 1: MRCC に対する悪い例. 太線で描かれている枝は実際には 3 本の直列枝から成る. 各枝の容量の下限は 0, 上限は各枝毎に示されている。ここで 'inf' $=+\infty$, $S_1=(1+r)/2$, $S_2=1/2$, 及び $S_3=r/2$ である ($r=(\sqrt{5}-1)/2$). 枝 (t,s) の費用は -1, $(s,4),(s,7),(5,t)$ 及び $(8,t)$ は $-M$ ($\ll 0$), その他の枝は 0 である.

と等価な問題であり [3], MRCC は (MCF) の主問題, 双対問題の両方に適用され得ることがわかる. さらに, 図 1 の双対グラフに対し, MRCC は無限回の反復を要する事が示される.

参考文献

[1] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan, "Finding minimum-cost circulations by canceling negative cycles," *J. ACM* **36**, 873–886 (1989).

[2] M. Queyranne, "Theoretical efficiency of the algorithm "Capacity" for the maximum flow problem," *Math. Oper. Res.* **5**, 258–266 (1980).

[3] R. T. Rockafellar, *Network flows and monotropic optimization*, Wiley Interscience (1984).

[4] C. Wallacher, "A generalization of the minimum-mean cycle selection rule in cycle canceling algorithms," preprint, Institute für Angewandte Mathematik, TU Braunschweig (1989).

[5] C. Wallacher and U. T. Zimmermann, "A polynomial cycle canceling algorithm for submodular flows," preprint, Abteilung für Mathematische Optimierung, TU Braunschweig (1994).

[6] A. Weintraub, "A primal algorithm to solve network flow problems with convex costs," *Management Sci.* **21**, 87–97 (1974).