1997年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

数式処理による箸並びの近似

01001092　岩手大学人文社会科学部　石川明彦　ISHIKAW Akihiko

箸並び待ち行列 (Chopstick-queues)

箸並び待ち行列 (Chopstick-queues) とは、これまで並列待ち行列 (Parallel Queues) と呼ばれていたもので、ここではその中の最も simple な窓口２の待ち行列模型を対象とする。規律は以下の通りとする。

客の系への到着	: 率λの Poisson到着
service窓口数	: ２窓口
service時間分布	: 両者とも率μの指数分布で、$\lambda/(2\mu)=\rho < 1$ とする。
窓口選択規律	: 系に到着した客は、その到着時において短い待ち行列の（客数の少ない）方の窓口を必ず選択し、各窓口毎に到着順にserviceを受ける。もし到着時に双方の待ち行列の長さが等しい場合、その到着客は等確率で窓口を選択する。
鞍替	: 全く許されない。

この時、２つの待ち行列の長さ (service 中の客を含み) が、それぞれ j,i ($j \geqq i$) の状態である平衡確率を p(j,i) と表現し、また系内客数が n である平衡確率を S(n) と表現する。平衡方程式の記述は容易なのだが、平衡解の表示が不十分なので、次のような近似模型を考える事にする。

近似模型待ち行列

２本の箸並び待ち行列の長さに制限 Nc を設け、Ncを超えた場合にはその先の「共通待ち行列」で待つことにする($2 \leqq Nc < \infty$)。Nc = 1 の場合一般の「共通待ち行列 (Fork並び)」に相当し、$Nc = \infty$ の場合が Original の箸並び待ち行列に相当している。(図１. 参照)

この近似模型待ち行列は、Ncとρの値を具体的に与えると、平衡解を数値解として容易に求めることが出来る。しかしここでは、Ncを具体的に与え、平衡解をρのみで表現することを目標にする。

数式処理計算

基本的には、Nc = N を与えると平衡解 p(j,i)は、ρを母数とした、Nt = (N+4)(N-1)/2 次元の線形方程式の解として得られる。この時の個々の平衡解 (Nt個) はρに関する有理分数式(Rational fractional expression)、すなわちρに関する２つの多項式の比として表現される。個々の解の分子多項式は、ρに関し高々 (N+2)(N+1)/2 次の多項式で、当然状態 (j,i) に依存し固有的に表現されている。一方分母の多項式 QN(ρ)（正確には共通分母の最小公倍多項式）は、共通的に次のような因数で構成されている。

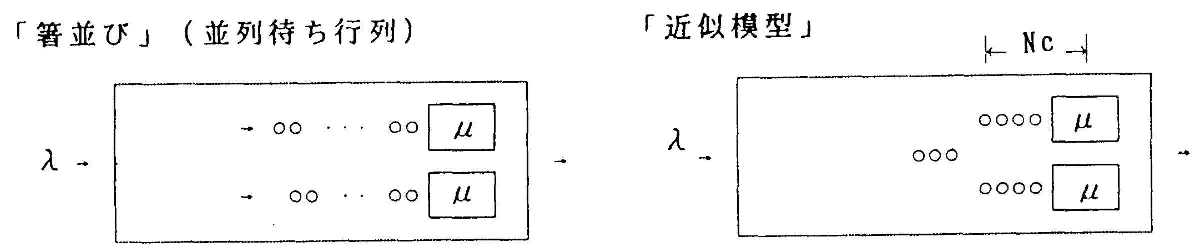
$$Q_N(\rho) = A_N B_2 B_3 \cdots B_{N-1} B_N \qquad \text{(分母多項式)}$$

$$A_n = 2^{n-1} + 2^{n-2}\rho + 2^{n-3}\rho^2 + \cdots + 2\rho^{n-2} + \rho^{n-1} + \rho^n \qquad (n=3,4,\ \ )$$

$B_1 = 1$, $B_2 = 1 + 2\rho$, $DB_2 = 2\rho$ を初期条件として　(n=2,3,　)

1. $B_{2n-1} = B_{2n-2} + \rho DB_{2n-2}$.　　2. $DB_{2n} = B_n\{B_{n+1} - B_{n-1}\}$.

3. $B_{2n} = B_{2n-1} + DB_{2n}$



（ 図１. ）

このように有理分数式とし求められた各平衡確率を、見通しが良くなるように（誤差を覚悟で） Taylor 展開表示する。主な平衡確率等は以下の通りである。（ρの低次巾係数から順に係数を表示してある。）

p(0,0) = {1, -2, 2, -3, 13/2, -29/2,
251/8, -1045/16, 4215/32, -16689/64, 2055/4, }

p(1,1) = {0, 0, 2, -5, 15/2, -27/2,
225/8, -955/16, 3997/32, -16383/64, 8247/16, }

p(2,2) = {0, 0, 0, 0, 2, -4, 5/2,1, -45/8, 21/2, -199/16, }

p(3,3) = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 3, -7/4, 9/4,
-81/16, 337/32, -295/16, 1821/64, -10555)/256,}

p(4,4) = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 3,
-3/2, 5/8, 1/2, -3, 257/32,}

p(5,5) = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -4, 3, -3/2, 3/4, -7/16,}

p(1,0) = {0, 2,-4,4,-6,13, -29, 251/4, -1045/8, 4215/16, -16689/32, }

p(2,0) = {0, 0, 0, 2, -7, 15, -121/4, 491/8, -1989/16, 8023/32, -504, }

p(3,0) = {0, 0, 0, 0, 0, 1, -7/2, 6, -13/2, 3, 173/32, }

p(4,0) = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/2, -2, 33/8, -25/4, }

p(5,0) = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/4, -9/8, }

S(1) = {0, 2, -4, 4, -6, 13, -29, 251/4, -1045/8, 4215/16, -16689/32,}

S(2) = {0, 0, 2, -3, 1/2, 3/2, -17/8, 27/16, 19/32, -337/64, 183/16, }

S(3) = {0, 0, 0, 2, -3, 1, -1/4, 7/8, -25/16, 67/32, -41/16, }

S(4) = {0, 0, 0, 0, 2, -3, 1, 0, -1/8, 1/2, -33/32, }

S(5) = {0, 0, 0, 0, 0, 2, -3, 1, 0, 0, -1/16, }

また、平均系内人数 ELc、系内人数の分散 VLc、並びに「共通待ち行列（Fork並び）」との差は以下の通りである。

ELc = { 0, 2, 0, 4, -6, 17,
-33, 279/4, -1069/8, 4195/16, -16313/32, }

VLc = { 0, 2, 0, 10, -15, 54,
-443/4, 2179/8, -9253/16, 41303/32, -89205/32, }

ELc - EL = {0, 0, 0, 2, -6, 15,
-33, 271/4, -1069/8, 4163/16, -16313/32, }

VLc - VL = {0, 0, 0, 4, -15, 44,
-443/4, 2067/8, -9253/16, 40727/32, -89205/32, }

このとき、 EL - ELq = ELc - ELqc = 2ρが成立している。

参考文献

1. 石川明彦 : 効率から見た並列待ち行列
   シンポジュウム報文集「情報・通信ネットワークに関する性能評価モデルの総合的研究」(1993), 252-259.
2. Ishikawa, A. : On two queues in parallel with heterogeneous servers. TRU Mathematics Vol.16-1,(1980), 55-68.
3. Flatto, L. & Mckean, H.P. : Two queues in parallel. Comm. Pure Appl. Math., Vol.30,(1977), 255-263.
4. Gertsbakh, I. : The shorter queue problem: A numerical study using the matrix-geometric solution. EJOR Vol.15,(1984), 347-381.